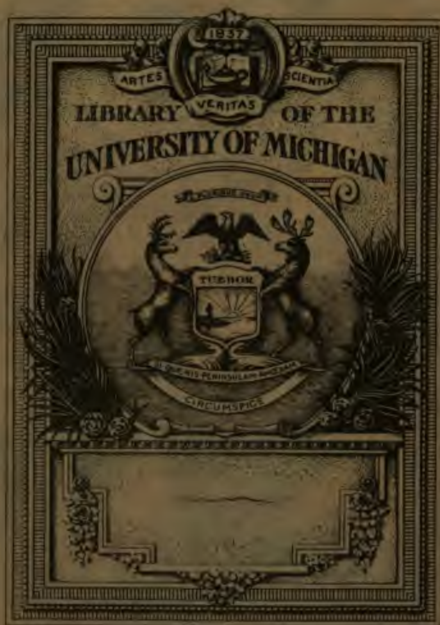

1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



g^F

Alfred Pell

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE CALCUL
ET
DE GEOMETRIE.

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL ET DE GEOMETRIE;

A L'USAGE DES COLLEGES;

Par le P. TORNÉ, Prêtre de la Doctrine Chrétienne.



A PARIS,

Chez Ch. Ant. JOMBERT, Imprimeur du Roi pour le Génie & l'Artillerie, rue Dauphine.

M. DCC LIV.

AVEC PRIVILEGE DU ROI.

PRÉFACE.

LE goût de la ſaine philoſophie ſe répand inſenſiblement dans l'école. Ce qui en arrête les progrès, eſt le défaut d'un abrégé court & facile des élémens de Mathématiques, qui ſoit comme la baſe d'un cours de phyſique. Il y a, je l'avoue, un ſi grand nombre d'ouvrages ſur cette ſcience, qu'il ne ſemble plus permis de l'augmenter : mais comme ils ſont tous faits pour une claſſe de Mathématiques, ou pour être étudiés en particulier, les Auteurs ne s'y ſont pas bornés aux connoiſſances élémentaires autant qu'il le faut dans un ouvrage qui ne doit pas occuper une claſſe plus de quatre ou cinq mois.

J'ai cru que les Profeſſeurs qui voudront dans nos Colleges faire ſervir d'introduction à la phyſique les premiers élémens de Mathématiques, ſeroient bien aiſe de mettre dans les mains de leurs Diſciples un Livre qui contînt en abrégé les principes de cette ſcience les plus néceſſaires aux commençans. En enſeignant pendant pluſieurs années mes élémens aux Penſionnaires du College de l'Eſquille, qui étudioient en Philoſophie, j'ai éprouvé combien il eſt difficile de dicter ces matieres

dans une classe. Je souhaite que les corrections continuelles que j'ai faites à cet ouvrage, à mesure que j'observois ce qui arrêtoit les jeunes gens, ou qui étoit au-dessus de leur portée, lui ayent donné le degré convenable de précision & de clarté. Pour le rendre utile à ceux qui voudront donner à leurs Ecoliers des notions moins étendues de Mathématiques, j'ai tracé dans le Livre même un abrégé, en marquant d'une étoile à la marge les numero dont on peut omettre l'explication. Tous les autres forment une suite de vérités indépendantes des numero marqués, & ne font que la moitié de cet ouvrage : ceux qui s'en tiendront à cet abrégé pourront négliger la derniere leçon toute entiere.

Qu'on ne craigne pas que la Physique Mathématique soit au dessus de la portée des commençans : elle est, de l'aveu des connoisseurs, & plus facile & plus attrayante pour les commençans qu'une physique, où l'imagination s'égare dans des systêmes hazardés, & qui laisse toujours l'esprit dans un chaos de difficultés.

Quoiqu'il en soit, une célébre Université nous encourage par son exemple. Les esprits sont-ils plus bornés dans les Provinces que dans la capitale ? Les Mathématiques d'ailleurs, fussent-elles encore plus difficiles, sont devenues nécessaires : elles peuvent seules introduire dans l'école la physique des Acadé-

mies & des bons Auteurs, dissiper les ténébres que la dispute y répand sur la vérité, y porter d'utiles connoissances, y ramener enfin la justesse de l'esprit, l'amour de la vérité, le goût de l'étude & la bonne foi.

EXPLICATION DES SIGNES.

$+$ ſignifie *plus*. 2 plus 3 s'écrit ainſi, $2 + 3$.

$-$ ſignifie *moins*. 6 moins 2 s'écrit ainſi, $6 - 2$.

$=$ ſignifie *eſt égal à*. 3 plus 4 eſt égal à 7, s'écrit ainſi, $3 + 4 = 7$.

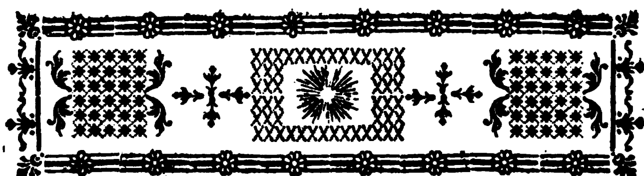
$\times$ ſignifie *multiplié par*. 3 multiplié par 4 s'écrit ainſi, 3×4.

$\frac{4}{2}$ ſignifie 4 *diviſé par* 2. En général pour marquer la diviſion de deux grandeurs a & b, on les écrit l'une ſous l'autre, & on les ſépare par un trait en cette ſorte, $\frac{a}{b}$, a diviſé par b.

$\sqrt[2]{}$ ou plus ſimplement $\sqrt{}$, ſignifie *la racine quarrée* : la racine quarrée de 9 eſt 3, s'écrit ainſi, $\sqrt{9} = 3$.

Lorſqu'il ſe trouve un nombre entre deux parentheſes, cela veut dire que ce que j'avance eſt prouvé dans le numero marqué par ce nombre. L'intelligence d'une démonſtration dépend le plus ſouvent d'une de ces citations ; il faut bien y faire attention.

Lorſque dans un numero de Géométrie on ne citera pas de figure, il faut recourir à la derniere citée.



LEÇONS DE CALCUL ET DE GÉOMÉTRIE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Les Mathématiques ont pour objet la grandeur, ou la quantité, c'est-à-dire tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution, comme les nombres, l'étendue, le mouvement, &c.

2. La partie des Mathématiques qui traite des nombres par le moyen des chiffres, s'appelle *Arithmétique*; on nomme *Algébre* celle qui traite des grandeurs en général par le moyen des lettres : je comprends l'une & l'autre sous le nom général de calcul. On appelle *Géométrie* celle qui a pour objet les trois dimensions de l'étendue.

3. Les Mathématiciens commencent à démontrer la vérité par l'établissement de quelques principes évi-

dens par eux-mêmes, qu'ils appellent des *axiomes*. Ils en déduisent des vérités de pure théorie, qu'on appelle *théorêmes*, & la maniere de faire des opérations, qu'ils nomment des *problêmes*. Des vérités déja démontrées ils tirent des conséquences aisées, sous le nom de *corollaires*. En un mot, les Mathématiques ne sont qu'un enchaînement de vérités qui se donnent la main ; il faut les suivre avec ordre : l'esprit ne peut pas plus en passer quelques-unes pour aller à de plus relevées, qu'un corps se mouvoir d'un endroit à un autre sans traverser de milieu.

AXIOMES GÉNÉRAUX.

4. Le tout est plus grand que sa partie, & il est égal à toutes ses parties prises ensemble.

5. Deux quantités, dont chacune est égale à une troisiéme, sont égales.

6. Des quantités égales, qui ont reçu des augmentations, ou souffert des diminutions égales, restent égales.

7. Des quantités égales, qui ont reçu des augmentations ou souffert des diminutions inégales, sont devenues inégales.

8. Des quantités inégales, qui ont reçu des augmentations ou souffert des diminutions égales, restent inégales.



PREMIERE PARTIE.

DU CALCUL.

Nous divisons en six leçons ce que nous avons à dire dans cette partie. La premiere traite des quatre premiéres Régles d'Arithmétique ; la seconde des quatre premiéres Régles d'Algébre ; la troisiéme contient la formation des puissances & l'extraction des racines ; la quatriéme contient les opérations de l'Arithmétique sur les fractions ; la cinquiéme traite des proportions, & la sixiéme des équations.

LEÇON PREMIERE.

DE L'ARITHMÉTIQUE.

Propriétés générales des Nombres.

9. L'Arithmétique enseigne à faire sur les nombres différentes opérations, & en démontre la méthode. On exprime les nombres par des chiffres qui sont au nombre de dix. Les voici :

0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9.
zero	un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf.

10. *Lorsqu'on joint ensemble plusieurs chiffres, leur valeur augmente en raison décuple en allant de droite à gauche*, c'est-à-dire dans une suite de chiffres l'unité de chacun vaut dix fois plus que l'unité du chiffre suivant; ainsi le dernier de plusieurs chiffres exprimant toujours des unités, le pénultiéme exprime des dixaines, un troisiéme chiffre à gauche exprime des centaines, un quatriéme des mille, un cinquiéme des dixaines de mille, un sixiéme des centaines de mille, un septiéme des millions, &c. c'est ainsi que l'ont établi les premiers Arithméticiens. Les chiffres suivans 245 marquent donc deux cens quarante-cinq unités, ceux-ci 6385 marquent six mille trois cens quatre-vingt-cinq unités, & les suivans 736741936 marquent sept cens trente-six millions sept cens quarante-un mille neuf cens trente-six unités.

11. Le chiffre 0, qui n'a en lui-même aucune valeur, sert à augmenter la valeur des chiffres qui sont à sa gauche, & à exprimer des nombres qu'on ne sçauroit exprimer par la seule combinaison des neuf autres chiffres; ainsi dans le nombre quatre cens cinq, n'y ayant point de dixaines, il faut en faire occuper le rang par un zero, afin de mettre le 4 au rang des centaines, en cette sorte, 405. De même pour exprimer deux mille cinquante unités, il faut écrire ainsi, 2050, afin que 2 soit au rang des mille, & 5 dans celui des dixaines.

12. Il suit de là, que *pour rendre un nombre quelconque dix fois, cent fois, mille fois, &c. plus grand, il suffit d'écrire à la suite de ce nombre un, deux, trois, &c. zero;* car si à la suite d'un nombre quelconque, comme de 24, on écrit un zero, en cette sorte, 240, 4 qui ne marquoit que quatre unités, marque quatre dixaines, & 2 qui marquoit deux dixaines, exprime deux centaines. Si on écrivoit 2400, 4 qui exprimoit quatre

unités, exprimeroit alors quatre centaines, & 2 qui ne valoit que deux dixaines, vaudroit deux mille (10): donc, &c. On pourroit aisément continuer ce raisonnement pour un plus grand nombre de chiffres & de zero.

13. On appelle *nombre simple*, tout nombre exprimé par un seul chiffre, & *nombre composé* celui qui est exprimé par plusieurs chiffres. On appelle les opérations simples, ou *composées*, selon qu'elles sont faites sur des nombres simples, ou composés. Les premieres n'ont pas besoin de régle.

DE L'ADDITION.

14. L'Addition sert à trouver la somme de plusieurs nombres. En voici les Régles.

Pour ajouter les nombres A & B (ex. 1.) je dis, 3 & 5 font 8, 1 & 2 font 3, 2 & 4 font 6; j'écris ces trois sommes à mesure que j'opére, chacune sous sa colomne, j'ai la somme S des nombres A & B, puisqu'elle est composée de la somme des unités, de la somme des dixaines, & de la somme des centaines de ces deux nombres.

1er *exemple*.

213	. . A
425	. . B
638	. . S

Pour ajouter les nombres A, B (ex. 2) & C, je dis, 3 & 5 font 8, & 2 font 10; j'écris o sous 2, & j'augmente le premier chiffre de la colomne des dixaines d'une unité, qui dans ce rang vaut les dix unités que je viens de trouver (10); je dis donc, 2 & 2 font 4, & 3 font 7, que j'écris sous 3; ensuite je dis 8 & 8 font 16, & 4 font 20; j'écris o sous 4, & j'augmente le premier chiffre 2 du rang des mille de deux unités,

2e *exemple*.

2813	. . A
825	. . B
1432	. . C
5070	. . S

qui dans ce rang valent les vingt centaines que je viens de trouver (10); je dis donc, 4 & 1 font 5, que j'écris sous 1, & la somme des nombres proposés est S.

Enfin pour ajouter les nombres A, B & C (ex. 3), je dis, 6 & 5 font 11, & 7 font 18; ce que j'écris ainsi $6+5+7=18$; j'écris les huit unités & je retiens la dixaine, pour la transporter au rang des dixaines, ce qui s'exprime ordinairement ainsi, j'écris 8 & je retiens 1; je dis ensuite, $9+4+6=19$, j'écris 9 & je retiens 1; enfin je dis, $4+1+9=14$ que j'écris en plaçant le 4 sous le 9, & j'ai la somme S des nombres proposés A, B & C, comme il est évident. Voyez encore l'exemple 4e.

3e *exemp.*

386	A
145	B
967	C
1498	S

15. On peut tirer des opérations précédentes cette régle générale: *pour ajouter plusieurs nombres, disposez-les de façon que leurs unités, leurs dixaines, leurs centaines se répondent, & tirez un trait au dessous; prenez d'abord la somme des unités, ensuite celle des dixaines, puis celle des centaines, &c. si quelqu'une de ces sommes est moindre que 10, écrivez-la dans son rang; si elle est égale précisément à une ou à plusieurs dixaines, écrivez au dessous 0, & augmentez le premier chiffre de la colomne qui est à gauche d'autant d'unités que vous avez trouvé de dixaines. Enfin si elle contient quelques unités au dessus des dixaines, écrivez ces unités dans leur rang, & transportez les dixaines, comme on vient de le dire.*

4e *exemp.*

6679	A
4232	B
9089	C
20000	

16. Faut-il ajouter des sommes composées de liv. de sols & de deniers, comme dans l'exemple 5? je dis d'abord pour les deniers, $8+11+10=29^{d.}=2^{f.}\ 5^{d.}$ j'écris donc 5 sous les

5e *exemple.*

liv.	sols	den.
602	15	8
923	16	11
43	18	10
1570	11	5

deniers, & j'ajoute 2 au 5 qui se présente d'abord au rang des sols, en disant, $7+6+8=21$; j'écris 1 & je retiens 2, ou deux dixaines de sols, que j'ajoute au rang des dixaines; je dis donc, $3+1+1=5=50^{sols}=2^{liv.}\ 10^{sols}$; j'écris 1 au rang des dixaines de sols, & je retiens 2, que j'ajoute aux livres, dont je fais l'addition à l'ordinaire (15).

On fera aisément, en suivant cette méthode, l'addition de toutes sortes de quantités disparates (on l'appelle addition complexe), pourvû qu'on sçache leur valeur respective; ainsi quand on sçaura que la toise contient six piés, le pied douze pouces, on fera aisément l'adition de l'exemple 6; comme aussi celle de l'exemple 7, si l'on sçait que l'heure contient 60 minutes, la minute 60 secondes. En un mot, *la régle générale de l'addition complexe est de prendre d'abord la somme des plus petites quantités, de la joindre aux plus grandes si elle peut les égaler, & d'écrire dans son rang le surplus, s'il y en a, ou la somme toute entiere, si elle n'est pas assez grande pour être changée en une plus grande espece.*

6e exemple.

tois.	*p.*	*pou.*
7	4	9
6	5	8
5	4	8
20	3	1

7e exemple.

heu.	*min.*	*s.*
10	20	22
12	31	24
15	17	20
38	9	6

DE LA SOUSTRACTION.

17. On *retranche par la Soustraction un nombre d'un autre, pour connoître la différence de ces deux nombres, ou l'excès de l'un sur l'autre. En voici les régles.*

Pour soustraire 23 de 36 (9ᵉ ex.) je dispose d'abord les nombres comme dans l'addition. Je dis ensuite 6—3=3, que j'écris sous 3; ensuite 3—2=1, que j'écris à gauche de 3, parce qu'il marque une dixaine, & j'ai 13 pour différence des nombres 36 & 23, puisqu'elle est composée de la différence des unités & de la différence des dixaines de ces deux nombres.

9ᵉ *ex.*
36
23
13

Pour soustraire B de A (10ᵉ ex.) je dis 3—5 ne se peut, j'augmente 3 de 10, & je diminue le 5 qui est à sa gauche d'une unité, ce qui fait une juste compensation (10); je dis donc 13—5=8, 4—4=0, 6—2=4, j'écris ces trois différences chacune dans son rang, ce qui donne D pour différence totale des nombres A & B.

10ᵉ *exem.*	
653	A
245	B
408	D

Enfin pour soustraire B de A (11ᵉ ex.) je dis, 3—4 ne se peut; je diminue donc le 5 qui précede les deux zero d'une unité, qui vaut 1000; & pour compenser cette diminution, j'écris 9 à la place de chaque zero, & j'ajoute 10 à 3, c'est-à-dire je change 1000 en neuf cens nonante & dix. Cela posé, je dis, 13—4=9, 9—6=3, 9—4=5, 4—3=1, 4—2=2; toutes ces différences écrites chacune dans son rang donnent D, vraie différence des nombres proposés. Voyez encore les exemples 12 & 13.

11ᵉ *exemp.*	
45003	A
23464	B
21539	D

18. On peut voir par les exemples précédens que *si dans la Soustraction le chiffre inférieur est plus petit que le supérieur, il faut écrire la différence au bas; s'il est plus grand,*

12ᵉ *ex.*	13ᵉ *ex.*
8405000	85964
5502	79986
8399498	5978

il faut ajouter 10 *au supérieur, & retrancher une unité au chiffre qui précéde ce supérieur, en observant que s'il est précedé d'un ou de plusieurs zero consécutifs, il faut diminuer d'une unité le chiffre qui précede ces zero, écrire* 9 *à la place de chacun, augmenter de* 10 *le chiffre supérieur dont il s'agit, & faire ensuite la soustraction à l'ordinaire. Enfin si le chiffre inférieur est égal au supérieur, il faut écrire* 0 *au dessous.*

19. *Dans la soustraction des quantités complexes, il faut principalement observer lorsqu'on diminue d'une unité une quantité plus grande, quelle est sa valeur par rapport à la plus petite.* Par exemple, s'il falloit soustraire trois toises cinq pieds de six toises quatre pieds (14e ex.) je dirois 4—5 ne se peut, je diminuerois 6 d'une unité qui vaut six pieds, & j'ajouterois 6 à 4, en disant 10—5=5, ensuite pour les toises 5—3=2; j'aurois pour différence deux toises cinq pieds.

14e *ex.*

toif.	*pi.*
6	4
3	5
2	5

Pour faire la soustraction de l'exemple 15, je dis

15e *exemple.*

liv.	*sols*	*den.*
200	0	0
36	15	9
163	4	3

16e *exemple.*

heu.	*min.*	*sec.*
402	4	0
35	43	26
366	20	34

0—9 ne se peut, je change donc 200 liv. en 199 liv. 19 s. 12 d., & je dis, 12—9=3, & pour les sols, 9—5=4, 1—1=0; ensuite pour les livres, 9—6=3, 9—3=6, 1—0=1; j'ai pour différence 163 l. 4 s. 3 d. Voyez encore l'exemple 16.

20. *Pour connoître si l'on a bien opéré, il faut ajouter la différence au plus petit nombre, la somme sera égale au plus grand si l'opération est bien faite;* car le plus grand

nombre n'eſt que le plus petit plus ſon excès ſur ce plus petit nombre.

DE LA MULTIPLICATION.

21. M*ultiplier un nombre* 3 (qu'on appelle *multiplicande*) *par un autre* 4 (qu'on appelle *multiplicateur*), *c'eſt prendre le premier autant de fois qu'il y a d'unités dans le ſecond, ou, ce qui revient au même, c'eſt chercher un troiſiéme nombre* 12 (qu'on appelle *produit*) *qui contienne le premier autant de fois que l'autre contient l'unité.*

22. *Le multiplicande demeurant le même, le produit croît dans la même proportion que le multiplicateur*; car plus le multiplicateur eſt grand, plus de fois on répéte le multiplicande.

23. *Si du multiplicande on fait le multiplicateur, le produit eſt toujours le même*; car c'eſt la même choſe de prendre par exemple 3 quatre fois, ou 4 trois fois. Pour la même raiſon, *le produit de pluſieurs mêmes chiffres eſt toujours le même dans quel ordre qu'on les multiplie.* Ainſi les divers produits des chiffres 2, 3, 4, c'eſt-à-dire de 2 par trois fois quatre, ou de 3 par deux fois quatre, ou de 4 par trois fois deux, ſont toujours 24.

24. *Si le multiplicateur eſt ſuivi d'un ou de pluſieurs zero conſécutifs, il ſuffit de multiplier par les chiffres poſitifs le multiplicande, & d'écrire à la fin du produit autant de zero qu'il y en a à la fin du multiplicateur*; car 30 étant dix fois plus grand, & 300 cent fois plus grand que 3 (12), le produit de 4 par 30 doit être dix fois plus grand que le produit 12 de 4 par 3 (22), & partant égal à 120 (12), & le produit de 4 par 300, doit être cent fois plus grand que 12 (22), c'eſt-à-dire 1200 (12). Donc, &c.

25. Il eſt néceſſaire de ſçavoir par cœur tous les produits qui peuvent réſulter de la multiplication des nombres ſimples pris deux à deux, pour faire avec facilité les multiplications compoſées. Voici la table de ces produits.

$3\times3=9$	$4\times3=12$	$5\times3=15$	$6\times3=18$
$3\times4=12$	$4\times4=16$	$5\times4=20$	$6\times4=24$
$3\times5=15$	$4\times5=20$	$5\times5=25$	$6\times5=30$
$3\times6=18$	$4\times6=24$	$5\times6=30$	$6\times6=36$
$3\times7=21$	$4\times7=28$	$5\times7=35$	$6\times7=42$
$3\times8=24$	$4\times8=32$	$5\times8=40$	$6\times8=48$
$3\times9=27$	$4\times9=36$	$5\times9=45$	$6\times9=54$

$7\times3=21$	$8\times3=24$	$9\times3=27$
$7\times4=28$	$8\times4=32$	$9\times4=36$
$7\times5=35$	$8\times5=40$	$9\times5=45$
$7\times6=42$	$8\times6=48$	$9\times6=54$
$7\times7=49$	$8\times7=56$	$9\times7=63$
$7\times8=56$	$8\times8=64$	$9\times8=72$
$7\times9=63$	$8\times9=72$	$9\times9=81$

Maintenant ſoit 312 à multiplier par 3 (17[e] ex.); je dis, trois fois deux ſont 6, ce que j'écris ainſi, $3\times2=6$, que j'écris ſous le trait; $3\times1=3$, que j'écris à gauche de 6, parce qu'il marque trois dixaines; $3\times3=9$, que j'écris à gauche de 3, parce qu'il marque des centaines; le produit eſt 936, car j'ai pris trois fois les unités, les dixaines, les centaines du multiplicande; & partant je l'ai pris trois fois tout entier, ce qu'il falloit faire (21).

17[e] ex.

$$\begin{array}{r} 312 \\ 3 \\ \hline 936 \end{array}$$

26. *Si le produit d'un chiffre du multiplicande par le chiffre multiplicateur, eſt exactement égal à une ou à plu-*

ſieurs dixaines, ou bien s'il y a quelque nombre au deſſus des dixaines, il faut, comme dans l'addition & pour la même raiſon, écrire au deſſous du trait dans le premier cas zero, dans le ſecond cas le ſurplus des dixaines, & dans l'un & l'autre cas il faut ajouter au produit du chiffre multiplicateur par celui qu'on trouve immédiatement à gauche dans le multiplicande, autant d'unités qu'on a trouvé de dixaines. Ceci paroîtra évident dans l'opération. Soit donc 524 à multiplier par 6 (18[e] ex.); je dis $6\times4=24$, j'écris 4 & je retiens 2; enſuite $6\times2=12$, $12+2$ retenus$=14$, j'écris 4 à gauche de 4, & je retiens 1; enfin je dis, $6\times5=30$, $30+1$ retenu$=31$, que j'écris en plaçant 1 ſous le 5, parce qu'il marque une centaine; le produit eſt 3144, ce qui eſt évident.

18[e] *ex.*

524
6
3144

27. S'il faut multiplier A par B (19[e] ex.) je multiplie d'abord A tout entier par le 3 de B; le produit eſt C. Je multiplie de rechef A par le 2 de B; mais ce 2 valant 20, il faut ajouter un zero au produit*, & j'ai D; enfin je multiplie A par le 4 de B, & ce 4 valant 400, il faut ajouter deux zero au produit (24), & j'ai E : la ſomme P de ces trois produits eſt évidemment le produit cherché; car C étant le produit de A par 3, D le produit de A par 20, E le produit de A par 400, C+D+E, ou P, eſt néceſſairement le produit de A par 423.

19[e] *exemp.*	20[e] *exemp.*
324 . . A	324 . . A
423 . . B	423 . . B
972 . . C	972 . . C
6480 . . D	648 . . . D
129600 . . E	1296 . . . . E
137052 . . P	137052 . . P

Il eſt évident que j'aurois pû ſupprimer ces zero dans l'exemple 19, en diſpoſant les chiffres, comme dans l'exemple 20; auſſi les ſuprime-t'on dans la pratique.

Pour multiplier A par B (21e ex.) je multiplie d'abord A par 5, j'ai le produit C ; & parce qu'il est inutile de multiplier A par les deux zero de B, je le multiplie par 7, j'ai le produit D ; mais 7 valant 7000, il faut ajouter à D trois zero (24), ou, ce qui revient au même, placer le dernier chiffre 1 du produit D au rang des mille, & la somme P de C & de D sera le produit de A par B.

21e exemple.

52043	A
7005	B
260215	C
364301	D
364561215	P

Il est évident par tous ces exemples, que *pour faire une multiplication composée, il faut multiplier le multiplicande tout entier successivement, par tous les chiffres du multiplicateur, en commençant par celui des unités, placer les produits les uns sous les autres, mais de façon que le chiffre des unités de chaque produit soit dans le rang du chiffre multiplicateur, & prendre la somme de ces produits, qui sera le produit cherché.* Voyez encore les exemples 22 & 23.

28. Veut-on réduire en sols une somme de livres ? il est clair que la livre contenant 20 sols, le nombre des sols contenus dans cinq livres est vingt fois plus grand que 5 : donc on aura le nombre des sols en multipliant 5 par 20. En appliquant ce raisonnement à tout autre exemple, on voit que *pour réduire les grandes especes en de plus petites, il faut multiplier la somme des grandes especes par le nombre qui exprime combien de fois la grande espece contient la petite.*

22e ex.	*23e ex.*
4565	523407
1424	546
18260	3140442
9130	2093628
18260	2617035
4565	285780222
6500560	

DE LA DIVISION.

29. D*iviser un nombre* 12 (qu'on appelle *dividende*) *par un autre* 4 (qu'on appelle *diviseur*), *c'est en chercher un troisiéme* 3 (qu'on nomme *quotient*) *qui marque combien de fois le dividende contient le diviseur.*

30. *Plus le dividende est grand, le diviseur restant le même, plus le quotient est grand*; car plus le dividende est grand, plus de fois il contient le même diviseur; & partant le quotient est plus grand (29); & par la raison contraire *plus le diviseur est grand, le dividende restant le même, plus le quotient est petit.*

31. *Si le dividende est terminé par des zero, il suffit d'en diviser les chiffres positifs par le diviseur, & d'écrire ces zero à la fin du quotient*; car le quotient de 8 par 4 étant 2, celui de 80, dix fois plus grand que 8 (12) par 4 sera (30) dix fois plus grand que 2 ou 20 (12). Pareillement 800 étant cent fois plus grand que 8 (12), son quotient par 4 sera cent fois plus grand que 2 (30), ou 200 (12). Donc, &c.

24ᵉ ex.		25ᵉ ex.	
A . . 966	3	A . . 966	3
	322 q.		300
			20
			2
			322 q.

32. S'il faut diviser A par 3 (24ᵉ ex.), je dis d'abord, en 9 combien de fois 3? trois fois; ce que j'écris ainsi, $\frac{9}{3}=3$ (la Division se fait toujours de gauche à droite), j'écris 3 au dessous du diviseur; ensuite je dis $\frac{6}{3}=2$, que j'écris à droite de 3; enfin je dis $\frac{6}{3}=2$, que j'écris à droite de 2, & j'ai le quotient Q: car c'est la même chose que si j'eusse

dit, comme dans l'exemple 25, $\frac{900}{3}=300$ (31), $\frac{60}{3}=20$, $\frac{6}{3}=2$; ces trois quotients ajoutés auroient donné le même quotient Q.

26e ex.	
A . 1476	3
12	492 q.
27	
27	
6	
6	
0	

Faut-il diviser A par 3 (26e ex.)? Le diviseur n'étant pas contenu dans le premier chiffre 1 du dividende, j'examine combien de fois il est contenu dans les deux premiers; mais si je me contentois de dire, comme dans l'exemple 24, $\frac{14}{3}=4$, $\frac{7}{3}=2$, $\frac{6}{3}=2$, le quotient 422 ne seroit pas exact; car 14 contient 3 quatre fois, & il lui reste quelque chose de plus, il en est de même de 7: donc pour connoître ce surplus, il faut soustraire de 14. 3 pris quatre fois ou 12, & écrire le reste 2 au dessous de 12. On a trouvé jusques-là que 3 est contenu quatre cens fois dans 1400 —200=1200; il reste à sçavoir combien de fois il est contenu dans le reste 200; mais le quotient de $\frac{200}{3}$ ne pouvant pas s'exprimer en centaines, il faut abbaisser à côté de 2 le 7 du dividende (ce qui donne 27=270), afin d'avoir, s'il se peut, un quotient exprimé en dixaines. Je dis donc, $\frac{270}{3}=90$, ou, comme on dit dans la pratique, $\frac{27}{3}=9$, que j'écris au rang des dixaines du quotient; je soustrais de 27 le diviseur 3 pris neuf fois, il ne reste rien: donc 27 contient 3 neuf fois juste, ou bien 270 contient 3 nonante fois juste. J'abaisse enfin le 6 du dividende, & je dis, $\frac{6}{3}=2$, que j'écris après le 9 du quotient, je soustrais de 6 le diviseur 3 pris deux fois, reste 0: donc 6 contient le diviseur 3 deux fois juste: donc le dividende 1476 contient le diviseur 3 quatre cens nonante deux fois juste; sçavoir 1200 quatre cens fois, 270 nonante fois, & 6 deux fois, ce qu'il falloit trouver (29).

On voit aisément par les deux exemples précédens

que *pour diviſer un nombre quelconque par un nombre ſimple, il faut 1°. diviſer le premier chiffre du dividende, ou les deux premiers, ſi le premier eſt trop petit, par le diviſeur : 2°. multiplier le diviſeur par le chiffre qu'on vient de trouver au quotient : 3°. ſouſtraire ce produit du premier, ou des deux premiers chiffres du dividende, ſi on a diviſé les deux premiers : 4°. abbaiſſer à côté du reſte, s'il y en a, le chiffre ſuivant du dividende, opérer ſur ce ſecond membre comme ſur le premier, & continuer ainſi la diviſion juſqu'à ce que tous les chiffres du dividende ayent été abbaiſſés ou diviſés : 5°. écrire les chiffres du quotient ſous le diviſeur à meſure qu'on les trouve.*

27e *ex.*

$$\begin{array}{r|l} 92 & 39 \\ \hline 78 & 2\frac{14}{39} \\ \hline 14 & \end{array}$$

33. Outre les régles preſcrites pour la Diviſion ſimple, il y en a d'autres à obſerver *dans la Diviſion compoſée* ; ainſi ſi je diviſe 92 par 39 (27e ex.), je ne dis pas, en 92 combien de fois 39 ? cette méthode exigeroit trop d'étendue d'eſprit dans la Diviſion des grands nombres. *On commence* donc dans ce cas *par prendre dans le dividende autant de chiffres qu'il y en a dans le diviſeur, & un de plus ; ſi les premiers chiffres font une ſomme plus petite que le diviſeur, on ſépare ces premiers chiffres des autres par une virgule* (dans cet exemple-ci on opére ſur le dividende entier) ; *on fait de ces chiffres le premier membre de la Diviſion, & on diviſe le premier, ou les deux premiers chiffres ſeulement de ce membre par le premier chiffre du diviſeur ; on continue comme dans la Diviſion ſimple, en faiſant les mêmes opérations ſur les membres ſuivans de diviſion que ſur le premier.* Ainſi je dis, en 9 combien de fois 3 ? trois fois ; *mais* le 9 du diviſeur n'étant pas contenu trois fois dans le 2 du dividende, il eſt faux que 92 contienne 39 trois fois. En effet 39 pris trois fois donne 117 plus grand que 92. *On trouve ſouvent dans de pareilles Diviſions un quotient trop grand. Il eſt donc néceſ-*

nécessaire d'éprouver chaque chiffre qu'on trouve au quotient, avant de l'écrire, & de le diminuer toujours d'une unité jusqu'à ce que son produit par le diviseur n'excéde pas la partie du dividende sur laquelle on opére, ce qu'il faut bien observer. Ayant donc trouvé le quotient 3 trop grand, j'essaye 2, que je trouve bon, son produit par 39 n'étant que 78 moindre que 92. J'écris donc 2 au quotient, & je soustrais 78 de 92, il reste 14 : donc 2 n'est pas le quotient exact de $\frac{92}{39}$. Pour en trouver un exact, il faudroit encore diviser 14 par 39; c'est ce que marque $\frac{14}{39}$ écrit en petit chiffre à côté du quotient 2.

34. S'il faut diviser A par B (18e ex.), après avoir trouvé, comme dans l'exemple précédent, 92 pour premier membre, 2 pour premier chiffre du quotient, & 14 pour reste, j'abbaisse 4 à côté de ce reste, j'ai C; je divise C par B, en disant, $\frac{14}{3}=4$, j'éprouve 4; mais pour faire ces épreuves avec ordre, j'écris le diviseur à part dès le commencement de l'opération, comme on le voit en B; j'écris au dessous les chiffres à éprouver à mesure que je les trouve, & j'écris les produits de ces chiffres par le diviseur les

18e *exemple.*

```
A . . 924606 { 39 B
O . . 78     { 23707  33/39
C . . 144
D . . 117
E . . . 276
F . . . 273
G . . . 306
F . . . 273
R . . . (33

   39 . . B
3, 2, 4, 9, 8, 7
 117 . . D
  78 . . O
 156 . . X
 351 . . Z
 312 . . V
 273 . . F
```

uns sous les autres. On a déja éprouvé 3 & 2, qui ont donné les produits D & O : il faut maintenant éprouver 4 ; son produit par B est X, plus grand que le dividende partiel G : donc 4 n'est pas bon. 3 a déja été éprouvé ; je soustrais son produit D par le diviseur du nombre G, le reste est 27. A côté de ce reste j'abbaisse 6, & le membre de la division est E, que je divise par B, en disant $\frac{27}{3}=9$; mais 9 & 8 donnant dans l'épreuve les produits Z & V plus grands que E, ne sont pas bons ; 7 est bon, & donne dans l'épreuve F, que je soustrais de E, le reste est 3. A côté de 3 j'abbaisse o, le dividende partiel est 30 ; & comme 30 est plus petit que le diviseur, 1 n'est pas bon ; j'écris donc o au quotient ; car si je ne l'écrivois pas, le premier chiffre du quotient, qui vaut des dixaines de mille, ne vaudroit que des mille, ainsi des autres. Pour la même raison *toutes les fois que le dividende partiel est moindre que le diviseur, il faut écrire o au quotient, & abbaisser un autre chiffre.* J'abbaisse donc 6 à côté de 30, j'ai pour dernier membre de division G, que je divise par B, en disant $\frac{30}{3}=10$; mais les chiffres au dessus de 9 ne peuvent jamais être bons, comme nous le démontrerons dans le n°. suivant ; & dans ce cas ci 9 & 8 déja éprouvés ne le sont pas non plus, mais 7 est bon ; je l'écris au quotient, & je soustrais de G le produit déja trouvé F du diviseur B par 7, le reste est R, que je mets en fraction à côté du quotient, & j'ai pour quotient total Q.

35. J'ai dit que les chiffres au dessus de 9 ne peuvent jamais être bons, & qu'ainsi *chaque membre de division ne peut donner au quotient qu'un nombre simple ;* car chaque dividende partiel ne peut avoir qu'un chiffre de plus que le diviseur ; ainsi le diviseur étant de deux chiffres, chaque membre de division ne peut en avoir que trois au plus ; & dans ce cas les deux premiers font une somme plus petite que le diviseur. Or

si le quotient de ce membre par le diviseur étoit 10, le produit du quotient par le diviseur seroit le diviseur même suivi d'un zero ; & partant un nombre plus grand que le dividende partiel. Voyez les exemples 29, 30, & 31.

29ᵉ ex.		30ᵉ ex.		31ᵉ ex.	
253,046	42	4736,45	1002	28125,074880	3906
252	6024 $\frac{38}{42}$	4008	472, $\frac{701}{1002}$	27342	7200480
104		7284		7830	
84		7014		7812	
206		2705		18748	
168		2004		15624	
(38		701		31248	
				31248	
				0	

36. *Le dividende est toujours égal au produit du diviseur par le quotient :* car le quotient marquant combien de fois le dividende contient le diviseur, (29) le dividende n'est autre chose que le diviseur pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, ou multiplié par le quotient (21).

37. *Le diviseur exprime combien de fois le dividende contient le quotient ;* car le dividende est égal au produit du quotient par le diviseur (36 & 23), c'est-à-dire au quotient pris autant de fois qu'il y a d'unités dans le diviseur. Donc, &c.

38. *Si le produit du diviseur par le quotient est égal au dividende, la division est bien faite ;* car dans ce cas le quotient marque exactement combien de fois le dividende contient le diviseur : or c'est ce qu'on se propose de trouver par la division. *Si la division a un reste,*

il faut ajouter ce reste au produit du quotient par le diviseur, pour retrouver le dividende; car (28[e] ex.) B×Q =A—R (36) : donc ajoutant R à ces deux quantités égales, B×Q+R=A (6).

39. *Si l'on divise le produit* P *de deux nombres* A & B *par l'un des deux* A, *on trouve l'autre* B *au quotient*; car on doit trouver au quotient un nombre dont le produit par le diviseur A soit égal au dividende P; or ce nombre est B par la supposition.

40. *Si en divisant le produit de deux nombres par l'un des deux on trouve l'autre au quotient, la multiplication a été bien faite.* Cela suit évidemment du n°. précédent; *ainsi la Multiplication & la Division se servent mutuellement de preuve.*

41. *Pour trouver le tiers, le quart, en un mot une partie quelconque d'un nombre, il faut le diviser par* 3, *par* 4, *en un mot par le nombre qui marque combien de fois la partie cherchée est contenue dans le tout*; car le diviseur exprimant combien de fois le dividende contient le quotient (37), si ce diviseur est 3, ou 4, on trouvera un quotient contenu trois ou quatre fois dans le dividende, c'est-à-dire qui en sera le tiers, ou le quart.

42. Pour réduire en livres une somme de sols, 100 sols, par exemple, il est évident que chaque livre contenant 20 sols, il ne faut que trouver la vingtiéme partie de 100 sols, & partant diviser 100 par 20 (41); le quotient est 5, nombre de livres contenues dans 100 sols. En appliquant ce raisonnement à tout autre exemple, on voit *que pour réduire les petites espéces en de plus grandes, il faut diviser la somme des petites espéces par le nombre qui marque combien de fois la grande espéce contient la petite.*



LEÇON SECONDE.

DE L'ALGÉBRE.

Notions préliminaires.

43. L'Algébre fait sur les lettres les mêmes opérations que l'Arithmétique sur les chiffres ; & comme les lettres peuvent exprimer toutes sortes de grandeurs, l'Algébre peut être appellée une *Arithmétique universelle.*

44. Les lettres employées dans le calcul algébrique forment des *expressions* algébriques, qu'on appelle *incomplexes* ou *monomes*, lorsqu'elles ne sont pas jointes par les signes + ou —, comme abc, ou $\frac{ab}{d}$ &c., & *complexes* ou *polimones*, si elles sont jointes par les signes + ou —, comme $a+b$, ou $ab-c+d$. Les lettres séparées par les signes forment les *termes* de l'expression, qu'on appelle *binome*, *trinome*, *quadrinome*, &c. selon qu'elle est composée de 2, 3, 4 &c. termes.

45. Les termes précédés du signe + sont appellés *positifs* ; ceux qui sont précédés du signe — sont appellés *négatifs* ; ceux qui ne sont précédés d'aucun signe sont censés positifs ; ainsi $ab = +ab$.

46. *Les termes négatifs sont plus petits que zero de tout ce qu'ils valent étant positifs* ; ainsi -3 est plus petit que zero de 3, $-a$ est plus petit que zero de $+a$; car on peut comparer les quantités négatives à des dettes, tandis que les positives exprimeront des biens réels : or un homme qui, sans avoir du bien réel, a une dette

de trois louis, eſt plus pauvre de trois louis que celui qui n'a rien & qui ne doit rien ; ainſi il a moins que rien de trois louis, puiſque quand bien même il auroit les trois louis qu'il doit, il n'auroit encore rien.

Il ſuit de là, 1°. *que zero tient le milieu entre une quantité poſitive & cette même quantité négative, entre* $-a$ *&* $+a$; 2°. *que l'on peut ſuppoſer que tout monome poſitif ou négatif eſt un binome, dont zero eſt le premier terme*; enſorte que $+a = 0 + a$, & $-a = 0 - a$.

47. Le chiffre qui précéde un terme en eſt appellé le *coefficient*. Il ſignifie combien de fois ce terme doit être écrit ; ainſi $3ab = ab + ab + ab$; mais le chiffre écrit à droite d'une lettre & un peu au deſſus, eſt appellé l'*expoſant* de cette lettre ; il ſignifie combien de fois la lettre doit être écrite de ſuite dans le même terme ; ainſi $a^2 b^3 c^4 = aa\ bbb\ cccc$. Si le terme n'eſt précédé d'aucun chiffre, ou ſi une lettre n'a pas d'expoſant, l'unité eſt alors le coefficient du terme & l'expoſant de la lettre ; ainſi $abd^3 = 1a^1b^1d^3$.

48. Les termes qui ſont compoſés des mêmes lettres écrites un même nombre de fois, ou qui ont le même expoſant, ſont appellés *termes ſemblables*, quoiqu'ils ayent des ſignes différens & des coefficients inégaux ; ainſi $+3a^2bc^4$, $-5a^2bc^4$ ſont des termes ſemblables ; mais ab & a^2b ne le ſont pas, non plus que a^2b^3 & a^2b^3c.

Les opérations algébriques ſont la réduction, l'addition, la ſouſtraction, la multiplication & la diviſion. Nous parlerons dans une leçon ſéparée de la formation des puiſſances & de l'extraction des racines.

De la réduction, addition, & ſouſtraction.

49. L*A réduction ſert à rendre une expreſſion plus ſimple, ſans en changer la valeur.* En voici les régles.

50. 1°. *Si dans la même expression deux termes semblables ont différens signes & mêmes coefficients, il faut les effacer*; car $3a^2b^4 - 3a^2b^4 = 0$, *ce qui est évident.*

51. 2°. *Si plusieurs termes semblables ont le même signe, il faut les réduire à un seul qui leur soit semblable, qui ait le même signe & la somme de leurs coefficients*; ainsi $+4a^2b + 3a^2b = 7a^2b$; car quatre fois a^2b & trois fois a^2b donnent sept fois a^2b. Pour la même raison $-4a^2b - 3a^2b = -7a^2b$.

52. 3°. *Si deux termes semblables ont différens signes, il faut les réduire à un seul qui leur soit semblable, qui ait le signe du plus grand & la différence des deux coefficients*; ainsi $+7a^2b - 3a^2b = +4a^2b$; car sept fois a^2b moins trois fois a^2b donne quatre fois a^2b. De même $-7a^2b + 3a^2b = -4a^2b$; car $-7a^2b = -4a^2b - 3a^2b$ (51); or $-4a^2b - 3a^2b + 3a^2b = -4a^2b$, à cause que $+3a^2b$ & $-3a^2b$ se détruisent (50). Donc, &c.

53. D'où il suit, que *pour réduire une expression A où il se trouve plusieurs termes semblables, dont les uns sont positifs & les autres négatifs, il faut réduire les termes positifs à un seul, les négatifs à un autre* (51), *réduire ensuite ces deux termes à un seul* (52), *& effacer ceux qui se détruisent.* De cette façon A se réduit à B.

A. $a^2b^3c + 2b^2 + 3b^2cd + 2a^2b^3c - 3b^2cd - 5a^2b^3c + 3b^2 - a^2b^3c$ B. $- 3a^2b^3c + 5b^2$.

54. *On ajoute les quantités algébriques en les écrivant de suite telles quelles sont, après quoi on fait la réduction de la somme* (53).

55. *Pour soustraire un monome d'un autre, il faut l'écrire à la suite de cet autre, après en avoir changé le signe + en — ou — en +*; ainsi pour soustraire $+b$ de a, il faut écrire $a-b$, ce qui est évident; & pour soustraire $-b$ de a, il faut écrire $a+b$; car a surpassant o de a, il surpasse nécessairement de $a+b$ la quantité $-b$ moindre que o de tout b (46).

56. De même *pour soustraire d'une expression quelconque* représentée par *a un polinome quelconque, il faut changer tous les signes de ce polinome, & l'écrire à la suite de l'expression donnée a*; car que $+b$ représente la somme de tous les termes positifs du polinome qu'on veut soustraire, & que $-c$ représente la somme de tous ses termes négatifs; il est clair que a surpasse b de $a-b$, & qu'il surpasse par conséquent de $a-b+c$ la quantité $b-c$ moindre que b de tout c; c'est-à-dire que dans la différence des expressions proposées, tous les termes positifs $+b$ de celle qu'on doit soustraire deviendront négatifs, & tous ses termes négatifs $-c$ deviendront positifs; ainsi pour soustraire B de A (32ᵉ ex.) écrivez C, qui se réduit à D.

32ᵉ exemple.

A . . . . . $6ab^2 - 5bc^3 + 3cd$
B . . . . . $4ab^2 - 3bc^3 + 3cd$
C . . $6ab^2 - 5bc^3 + 3cd - 4ab^2 + 3bc^3 - 3cd$
D . . . . $2ab^2 - 2bc^3$

DE LA MULTIPLICATION.

57. Pour *multiplier deux monomes l'un par l'autre, il faut 1°. faire leur produit positif, s'ils ont le même signe; & négatif, s'ils ont différens signes : 2°. multiplier les coefficients à la façon des nombres : 3°. écrire une seule fois au produit les lettres communes aux deux monomes avec la somme de leurs exposans : 4°. écrire de suite les lettres différentes.*

La régle des lettres est arbitraire. Les Algébristes sont convenus d'exprimer le produit des lettres par leur union.

Selon la régle des exposans $b^2 \times b^3 = b^5$, ce qui est évident; puisque $b^2 \times b^3 = bb \times bbb = bbbbb = b^5$ (47).

Selon la régle des coefficiens $2a \times 3b = 6\,ab$. En effet $2a \times 3b = 2 \times a \times 3 \times b = 2 \times 3 \times a \times b$ (23) $= 6\,ab$.

Selon la régle des signes : 1°. $+a \times +b = +ab$, ce qui est évident : 2°. $-a \times +b = -ab$. En effet, le produit de $-a$ par $+b$ n'est que la quantité négative $-a$ prise autant de fois qu'il y a d'unités dans b ; donc ce produit doit être négatif : 3°. $-a \times -b = +ab$; car le produit de $-a$ par $-b$ n'est que la quantité $-a$ prise autant de fois & de la même maniere que l'unité est dans $-b$: or dans $-b$ ou $0-b$ l'unité prise un nombre b de fois est soustraite de zero : donc il faut soustraire de zero la quantité $-a$ prise un nombre b de fois, ou, ce qui est la même chose (21), la quantité $-ab$, & partant (55) écrire $0+ab$, ou $+ab$ (46) : cela posé, on voit aisément que $2a^2b \times 4a^3b^2c = 8a^5b^3c$, que $-3b^3xy^4 \times 5bx^2y^3 = -15b^4x^3y^7$, que $-abc \times -6a^2b = 6a^3b^2c$.

58. *Pour multiplier un polinome par un monome, il faut multiplier successivement tous les termes du multiplicande par ce monome ; & si le multiplicateur est aussi un polinome, il faut multiplier le multiplicande successivement par tous les termes du multiplicateur, écrire les produits partiels les uns sous les autres, les ajouter & les réduire.*

Ainsi pour multiplier A par $3ab$ (33ᵉ ex.) je dis, $2b^2 \times 3ab = 6ab^3$, $a^3bc \times 3ab = 3a^4b^2c$, $-3bd^2 \times 3ab = -9ab^2d^2$; le produit total est P.

33ᵉ *exemple.*

$$\begin{array}{l} A \,.\,.\, 2b^2 + a^3bc - 3bd^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 3ab \\ \hline P \,.\,.\, 6ab^3 + 3a^4b^2c - 9ab^2d^2 \\ \hline \end{array}$$

De même pour multiplier l'expression A par l'expression B (34ᵉ ex.), je multiplie A par le premier

terme de B, j'ai C; je multiplie de rechef A par le second terme de B, j'ai D; la somme de C & de D réduite est P, vrai produit de A par B. Voyez encore l'exemple 35.

34ᵉ exemple.

A . . $2a^2 + 4ax + x^2$
B . . . . $a - 2x$

C . . $2a^3 + 4a^2x + ax^2$
D $- 4a^2x - 8ax^2 - 2x^3$

P . . $2a^3 - 7ax^2 - 2x^3$

35ᵉ exemple.

A . . $5a^3x - 3ax^3 + 4a^2y^2$
B . . $2a^3x - ax^3 + 3a^2y^2$

C . . $10a^6x^2 - 6a^4x^4 + 8a^5xy^2$
D . $- 5a^4x^4 + 3a^2x^6 - 4a^3x^3y^2$
E . $+ 15a^5xy^2 - 9a^3x^3y^2 + 12a^4y^4$

P, $10a^6x^2 - 11a^4x^4 + 23a^5xy^2 + 3a^2x^6 - 13a^3x^3y^2 + 12a^4y^4$

DE LA DIVISION.

59. Pour *diviser un monome par un autre, il faut* 1°. *faire le quotient positif s'ils ont le même signe, & négatif s'ils ont différens signes* : 2°. *diviser le coefficient du dividende par celui du diviseur* : 3°. *ne pas écrire au quotient leurs lettres communes, si elles ont le même exposant, & les écrire avec la différence de leurs exposans, si le plus grand exposant se trouve au dividende* : 4°. *écrire au quotient les lettres du dividende qui ne se trouvent pas au diviseur*; car en opérant ainsi, on trouve un quotient dont le produit par le diviseur donne nécessairement le dividende avec son propre signe; ce qui n'arriveroit pas si on n'observoit ces régles. Il suit de là que

$\frac{9a^3b^4}{3ab^2} = 3a^2b^3$, $\frac{-3a^3bc}{+3a^3} = -bc$, $\frac{-12abd}{-3a} = +4bd$.

60. *La Division des polinomes demande les mêmes opérations que la division des nombres.* Ainsi pour diviser A par D (36e ex.), je dis d'abord, $\frac{a^2}{a} = a$; j'écris a au quotient, je multiplie D par a, & je soustrais le produit de A, en l'écrivant au dessous, après en avoir changé les signes, (55) j'ai B, je réduis A & B : il reste C à diviser par D ; pour cela je dis, $\frac{ab}{a} = b$, j'écris $+b$ au quotient, je multiplie D par $+b$, & je soustrais le produit de C, en l'écrivant au dessous de C, après en avoir changé les signes, j'ai E ; je réduis C & E, il ne reste rien : donc le quotient est Q. Les opérations ont été démontrées dans la Division des nombres.

36e exemple.

A . . $a^2 + 2ab + b^2$	$a + b$. D.	
B $- a^2 - ab$	$a + b$. Q.	
C . . $+ ab + b^2$		
E . . $- ab - b^2$		

Pour diviser A par D (37e ex.); je dis, $\frac{a^3}{a} = a^2$ que

37e exemple.

A . . $a^3 - b^3$	$a - b$. D
B $- a^3 + a^2b$	$a^2 + ab + b^2$. Q.
C . . $+ a^2b - b^3$	
E . . $- a^2b + ab^2$	
F . . . . . . $+ ab^2 - b^3$	
G . . . . $- ab^2 + b^3$	
0	

j'écris au quotient ; je multiplie le diviſeur par a^2, & je ſouſtrais le produit de A, en l'écrivant au deſſous, après en avoir changé les ſignes, ce qui donne B ; je réduis A & B, j'ai C, que je diviſe par D en cette ſorte, $\frac{a^2 b}{a} = ab$, que j'écris au quotient ; je multiplie ce diviſeur par ab, je change les ſignes du produit pour le ſouſtraire de C, j'ai E ; la réduction de C & de E donne F, que je diviſe par D, en diſant, $\frac{ab^2}{a} = b^2$; multipliant D par b^2 & changeant les ſignes, j'ai G ; F & G ſe réduiſent à zero : donc Q eſt le vrai quotient de A par D. Voyez encore l'exemple 38.

38e *exemple.*

$4a^2b^2 - 9b^2c^2 + 24bc^2d - 16c^2d^2$	$2ab - 3bc + 4cd$. D
$-4a^2b^2 + 6ab^2c - 8abcd$	$2ab + 3bc - 4cd$
$+6ab^2c - 8abcd - 9b^2c^2 + 24bc^2d - 16c^2d^2$	
$-6ab^2c + 9b^2c^2 - 12bc^2d$	
$-8abcd + 12bc^2d - 16c^2d^2$	
$+8abcd - 12bc^2 + 16c^2d^2$	
0	

61. *Dans ces ſortes de Diviſions* on pourroit être embarraſſé pour trouver quel eſt le terme du dividende qui doit être diviſé par le premier terme du diviſeur ; mais afin que ce terme ſe trouve toujours le premier dans le dividende, *il faut ordonner le diviſeur & le dividende, ſoit total ou partiel par rapport à la même lettre*, c'eſt-à-dire placer les premiers les termes où cette lettre a le plus grand expoſant.

Il arrive ſouvent que la Diviſion de deux polinomes

& même de deux monomes ne peut pas se faire exactement : nous verrons dans les fractions (85) ce qu'il faut faire dans ces cas.



LEÇON TROISIEME.

De la formation des Puissances & de l'extraction des Racines.

Régles de la formation des puissances.

62. LA *premiere puissance* d'une grandeur est cette grandeur même ; la *seconde puissance* ou le *quarré* est le produit de cette grandeur par elle-même ; la *troisiéme puissance* ou le *cube* est le produit de cette grandeur par son quarré ; la *quatriéme puissance* est le produit de cette grandeur par son cube ; ainsi du reste. Les puissances successives des grandeurs *P* sont donc les quantités qui leur répondent dans les rangs *S*, *T*, *Q*.

P	*S*	*T*	*Q*
$-a^1$	$+a^2$	$-a^3$	$+a^4$
$+2a^3b^4$	$+4a^6b^8$	$+8a^9b^{12}$	$+16a^{12}b^{16}$
$-3b^1d^2$	$+9b^2d^4$	$-27b^3d^6$	$+81b^4d^8$

63. D'où il suit, que *pour élever un monome à une puissance quelconque, il faut* 1°. *s'il est négatif, donner le signe* $+$ à sa seconde, quatriéme, sixiéme puissance, & en général *à toutes ses puissances paires, & le signe* $-$ *à ses puissances impaires :* 2°. *soit que le monome soit positif*

ou négatif, élever son coefficient à la puissance demandée selon la méthode de l'article 62 : 3°. *multiplier l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la puissance demandée*, c'est-à-dire par le nombre qui marque le degré de cette puissance ; car en opérant ainsi, on trouve la même quantité que si on faisoit passer le monome en question successivement par toutes les puissances qui précédent celle qu'on demande, comme on peut s'en convaincre par les exemples précédens.

* 64. *Le quarré d'un binome quelconque est composé du quarré de chaque terme, plus du produit du second terme par le double du premier* ; car en multipliant le binome $a + b$ par lui-même, on trouve pour son quarré l'expression $a^2 + 2ab^2$ composée du quarré de a, du quarré de b, & du produit de b par $2a$; & comme $a + b$ peut exprimer tout binome, $a^2 + 2ab + b^2$ peut exprimer le quarré de tout binome. Donc, &c. D'où il suit, que *pour élever un binome* $3a^2d - bc^3$ *à son quarré, il faut prendre d'abord le quarré* $9a^4d^2$ *du premier terme, puis le produit* $-6a^2dbc^3$ *du double* $6a^2d$ *du premier terme par le second ; enfin le quarré* $+ b^2c^6$ *du second terme ; la somme* $9a^4d^2 - 6a^2dbc^3 + b^2c^6$ *de ces trois produits sera le quarré cherché.*

* 65. *Le quarré de tout polinome est composé du quarré de la somme de tous ses termes, excepté le dernier, du produit du dernier terme par le double de cette somme & du quarré du dernier terme* ; car tout polinome peut être regardé comme un binome, dont la somme des termes, excepté le dernier, est le premier terme, & dont le dernier terme est le second : d'où il suit, que *pour élever un polinome quelconque*, par exemple un trinome $a + b + c$ *à son quarré, il faut prendre le quarré* $a^2 + 2ab + b^2$ *de la somme* $a + b$ *de tous ses termes, excepté le dernier, le produit du dernier terme* c *par le double* $2a + 2b$ *de cette somme*, c'est-à-dire, $2ac + 2bc$,

enfin le quarré c^2 *du dernier terme* C; *la somme* $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ *de tous ces produits sera le quarré cherché.*

Régles de l'extraction des racines des Monomes & de l'extraction de la racine quarrée des Polinomes.

66. LA quantité dont le produit par elle-même a formé le quarré, en est la *racine quarrée*; & la quantité qui multipliée par son quarré a formé le cube, en est la *racine cubique*, ainsi des autres. Les quantités P dans l'article 62. sont donc les racines quarrées des termes qui leur répondent dans le rang S; les racines cubiques de ceux qui leur répondent dans le rang T, les racines quatriémes de ceux qui leur répondent dans le rang Q.

67. L'extraction des racines des monomes a trois régles, celle des signes, celle des coefficients, & celle des exposans.

1°. *Un monome positif a toutes ses racines paires positives ou négatives, ses racines impaires ne peuvent être que positives*; ainsi la racine quatriéme de $+ a^4$ est également $+ a$ ou $- a$; sa racine quarrée est également $+ a^2$ ou $- a^2$; mais la racine troisiéme ou cubique de $+ a^3$ n'est que $+ a$; car $- a$ donneroit à son cube $- a^3$ & non $+ a^3$, puisque $- a \times - a = + a^2$, & $+ a^2 \times - a = - a^3$; mais $+ a^2$ & $- a^2$ donnent également $+ a^4$ à leur quarré, $+ a$ & $- a$ donnent également $+ a^4$ à leur quatriéme puissance; *mais un monome négatif a ses racines impaires négatives, & n'a point de racine paire.* Ainsi la racine troisiéme de $- a^3$ est $- a$; mais la racine quarrée de $- a^2$ n'est ni $+ a$ ni $- a$; puisque le quarré de l'un & de l'autre est $+ a^2$.

2°. *Il faut extraire du coefficient du monome la racine demandée à la façon des nombres*; car en élevant ensuite cette racine à une puissance du même degré, on retrouvera nécessairement le coefficient du monome proposé.

3°. *Il faut diviser l'exposant de chaque lettre par l'exposant de la racine demandée*; car pour élever un monome m à sa quatriéme puissance M, il faut multiplier l'exposant de chaque lettre de m par 4 (63) : donc il faut diviser tous les exposans du nouveau monome M par 4 (39), pour retrouver ceux de m, qui est la racine quatriéme de M.

68. Lorsque la division des exposans, ou l'extraction de la racine du coefficient ne pourra pas se faire exactement, on ne pourra pas extraire la racine du monome proposé : on ne fait dans ce cas que l'indiquer par le signe radical $\sqrt{}$; ainsi $\sqrt[2]{a^5}$, ou plus simplement $\sqrt{a^5}$ exprime la racine quarrée de a^5, $\sqrt[3]{a^5}$ en exprime la racine cubique.

39e exemple.

$$\begin{array}{l|l} A.\ a^2 + 2ab + b^2 & a + b.\ R. \\ \hline -a^2 - 2ab - b^2 & 2a + b \\ & \quad\ \ b \\ \cline{2-2} & 2ab + b^2\ P. \end{array}$$

* 69. Soit maintenant à extraire la racine quarrée du polinome A (39e ex.), j'extrais d'abord la racine quarrée du premier terme a^2, j'ai a que j'écris en R; je le quarre, & je soustrais le quarré a^2 du premier terme de A, en écrivant au dessous $-a^2$, reste $+2ab+b^2$; je dis ensuite, le premier terme $2ab$ de ce reste est nécessairement le produit du double du premier terme a de la racine par le second (64) que je ne connois pas encore; je le connoîtrai en divisant le terme $2ab$ par $2a$ double de a (39);

(39) ; le quotient eſt $+ b$ que j'écris en R ; je multiplie $2a$ par b & je quarre b, ou, ce qui revient au même, je multiplie $2a+b$ par b, & je ſouſtrais le produit P du reſte de A, il ne reſte rien ; d'où je conclus que A eſt le vrai quarré de R (64), puiſqu'il contient le quarré de a, le produit de $2a$ par b & le quarré de b ; car on a ſouſtrait de A tous ces produits.

40ᵉ exemple

$$\text{A}.\ 25a^4c^2d^8 - 30a^2b^3c^2d^5 + 9b^6c^2d^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} 5a^2cd^4 - 3b^3cd.\ \text{R}. \\ \hline 10a^2cd^4 + 3b^3cd.\ \text{D} \\ \qquad\qquad -3b^3cd. \\ \hline \end{array} \right.$$

$$-25a^4c^2d^8 + 30a^2b^3c^2d^5 - 9b^6c^2d^2$$

$$-30a^2b^3c^2d^5 + 9b^6c^2d^2.\ \text{P}$$

De même pour extraire la racine quarrée de A (40ᵉ ex.), je dis $\sqrt{25a^4c^2d^8} = 5a^2cd^4$, (67) je l'écris en R, je le quarre, & je ſouſtrais ce quarré de $25a^4c^2d^8$, reſtent les deux derniers termes de A ; je double $5a^2cd^4$, en doublant ſon coefficient 5, j'ai $10a^2cd^4$ que j'écris au deſſous : je dis enſuite, $\frac{-30a^2b^3c^2d^5}{10a^2cd^4} = -3b^3cd$ que j'écris en R, à côté de $10a^2cd^4$ & au deſſous, pour ſervir de multiplicateur à D ; le produit eſt P, qui étant ſouſtrait du reſte de A, le détruit entierement ; d'où je conclus pour la même raiſon que dans l'exemple précédent, que R eſt la vraie racine quarrée de A.

* 70. Enfin ſoit le polinome A (41ᵉ ex.) dont il faut extraire la racine quarrée ; je trouve d'abord $a+b$ à la racine, comme dans l'exemple 39., & le reſte $2ac + 2bc + c^2$; je regarde $a+b$ comme faiſant le premier terme d'une racine qui doit en avoir un ſecond ; & partant je double $a+b$, j'ai $2a+2b$ que j'écris au

dessous de P, & je divise par $2a$ le premier terme $2ac$ du reste de A; le quotient est c que j'écris en R, en D & au dessous de D, pour lui servir de multiplicateur; le produit est E, qui étant soustrait du reste de A, le détruit entierement; d'où je conclus que le polynome A est le vrai quarré du trinome R (65), puisqu'il contient le quarré $a^2 + 2ab + b^2$ de la somme $a + b$ de ces deux premiers termes, le produit du double de cette somme par le dernier terme c & le quarré c^2 du dernier terme.

41e *exemple.*

A . $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$	$a + b + c$. R
$-a^2 - 2ab - b^2 - 2ac - 2bc - c^2$	$2a + b$
	b
	$2ab + b^2$ P
	$2a + 2b + c$ D
	c
	$2ac + 2bc + c^2$ E

Si le polynome A n'eût pas été épuisé par la soustraction de E, j'aurois doublé les trois termes trouvés, en les regardant comme le premier terme d'une racine qui doit en avoir un second, & j'aurois continué l'opération à l'ordinaire; mais lorsqu'on parvient à un reste de soustraction qui n'est point divisible par le double du premier terme de la racine, on ne peut plus continuer l'opération, & la racine trouvée n'est pas exacte.

Régles de l'extraction de la racine quarrée des nombres.

71. Les nombres Q sont les quarrés des nombres N qui leur répondent :

N.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Q.	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

c'eſt ce qu'il faut ſçavoir avant d'extraire la racine quarrée des nombres compoſés qui ſont au deſſus de 100.

* 72. *Un nombre quelconque ne peut avoir à ſon quarré plus que le double de ſes chiffres ;* car le quarré de 9, le plus grand des nombres ſimples, eſt moindre que 100, le plus petit des nombres à trois chiffres, puiſque 100 eſt le quarré de 10 ; le quarré de 99, le plus grand des nombres à deux chiffres, eſt moindre que 10000, le plus petit des nombres à cinq chiffres, puiſque 10000 eſt le quarré de 100; le quarré de 999, le plus grand des nombres à trois chiffres, eſt moindre que 1000000, le plus petit des nombres à ſept chiffres, puiſque 1000000 eſt le quarré de 1000. On peut aiſément continuer ce raiſonnement. Donc, &c.

* 73. Si l'on partage par des virgules *un nombre quelconque*, 3, 45, 67, 02, en allant de droite à gauche, en tranches compoſées chacune de deux chiffres, excepté la premiere qui peut n'en avoir qu'un; je dis *qu'il ne peut avoir à ſa racine quarrée ni plus ni moins de chiffres qu'il a de tranches.*

1°. Ce nombre ne peut avoir plus de chiffres à ſa racine quarrée qu'il n'a de tranches; car le quarré de 10 eſt de deux tranches; à plus forte raiſon les quarrés des nombres depuis 10 juſqu'à 100 excluſivement auront auſſi deux tranches. Le quarré de 100 eſt de trois tranches, à plus forte raiſon les quarrés des nombres depuis 100 juſqu'à 1000 excluſivement en ont auſſi trois, ainſi du reſte : donc il ne peut y avoir moins de tranches au quarré que de chiffres à la racine, ou, ce qui revient au même, plus de chiffres à la racine que de tranches au quarré.

2°. Il ne peut y avoir moins de chiffres à la racine

que de tranches au quarré : ainsi un nombre à quatre tranches ne peut avoir seulement trois chiffres à la racine ; car un nombre à quatre tranches a au moins sept chiffres ; & s'il n'en avoit que trois à la racine, cette racine auroit à son quarré plus que le double de ses chiffres, ce qui est impossible (72). Donc, &c.

74. Soit maintenant à extraire la racine quarrée de 625 (42e ex.) ; je divise 625 en deux tranches, d'où je conclus que la racine sera de deux chiffres, & je dis, le plus grand quarré contenu dans 6 est 4, dont la racine est 2, que j'écris ; j'éléve 2 à son quarré 4, que je soustrais de 6, reste 2 ; j'abbaisse à côté de ce 2 la seconde tranche 25, ce qui donne 225 ; j'écris au dessous de 2 trouvé à la racine son double 4, & je commence ainsi la division de 225 par 4, $\frac{22}{4} = 5$ que j'écris à la racine, à côté de 4 & au dessous, pour servir de multiplicateur à 45, le produit est 225 ; je soustrais ce produit de 225, il ne reste rien : donc 25 est la vraie racine de 625 ; car j'ai soustrait de 625 le quarré 400 du premier terme 20 de la racine, & la somme 225 composée du produit de 40, double du premier terme 20 de la racine, par le second terme 5, & du quarré de 5.

42e ex.	
625	25
4	45
225	5
225	225.

* 75. Enfin soit à extraire la racine quarrée du nombre A (43e ex.) ; je le divise en quatre tranches, d'où je conclus que sa racine aura quatre chiffres (73), & je dis, le plus grand quarré conte-

43e exemple.	
A . . 10, 27, 84, 79	3206 . R.
9	62
B . . 127	2
124	124 C
D 38479	6406 E
38436	6 .
(43	38436 . F

nu dans 10 eſt 9, dont la racine eſt 3, que j'écris; je dis enſuite, $3\times3=9$, $9-10=1$, j'abbaiſſe à côté de 1 la ſeconde tranche 27, ce qui donne B; j'écris 6 au deſſous de 3, & je dis, $\frac{12}{6}=2$ que j'écris en R, à côté de 6 & au deſſous, pour ſervir de multiplicateur à 62; le produit eſt C, que je ſouſtrais de B, reſte 3; j'abbaiſſe à côté de 3 la troiſiéme tranche, ce qui donne 384; j'écris en E 64, double de 32 trouvé à la racine, & je commence ainſi la diviſion de 384 par 64, $\frac{38}{6}=6$; mais je remarque que 64 ſuivi de l'unité forme un tout 641 plus grand que 384, (d'où je conclus qu'il faut écrire un zero à la racine, puiſque autrement elle ne ſeroit compoſée que de trois chiffres, au lieu qu'elle doit l'être de quatre (73), à plus forte raiſon 6 écrit à côté de 64 & au deſſous, pour ſervir de multiplicateur à 646, donneroit un produit plus grand que le dividende partiel 384: *il eſt donc néceſſaire dans l'extraction des racines, comme dans la diviſion, d'éprouver chaque chiffre trouvé à la racine, & de le diminuer toujours d'une unité, s'il eſt trop grand, juſqu'à ce qu'en l'écrivant à la ſuite du double des chiffres trouvés à la racine, & multipliant le tout par ce même chiffre, le produit n'excéde pas le membre de diviſion ſur lequel on opére; & ſi l'unité eſt un quotient trop grand, il faut écrire zero à la racine & abbaiſſer une autre tranche.* J'abbaiſſe donc à côté de 384 la derniere tranche, j'ai D; j'écris en E 640, double des chiffres 320 trouvés à la racine, & je dis, $\frac{38}{6}=6$, qui n'eſt pas trop grand, puiſque étant écrit à la ſuite de 640 & au deſſous, pour ſervir de multiplicateur à E, le produit P n'eſt pas plus grand que D; je ſouſtrais donc P de D, reſte 43; d'où je conclus que R eſt la vraie racine de A—43, & partant qu'elle n'eſt pas la racine exacte de A tout entier.

LEÇON QUATRIEME.

DES FRACTIONS.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

76. UNE *fraction* en général n'est autre chose que deux grandeurs a & b, dont la division est indiquée *en cette sorte*, $\frac{a}{b}$. Dans ce cas a s'appelle le *numérateur*, b le *dénominateur* de la fraction. Elle est *proprement* ou *improprement dite*, selon que le numérateur est moindre ou plus grand que le dénominateur ; d'où il suit *qu'une fraction proprement dite est moindre que l'unité*, puisque son dénominateur n'est pas contenu même une fois dans le numérateur.

77. *Le numérateur d'une fraction exprime le nombre des parties de l'unité que vaut cette fraction ; le dénominateur en marque l'espéce.* Ainsi dans la fraction $\frac{3}{6}$ le dénominateur 6 marque un sixiéme de l'unité, & le numérateur 3 exprime le nombre des sixiémes qui font la valeur de la fraction ; ensorte que $\frac{3}{6}$ vaut trois sixiémes de l'unité ; car $\frac{3}{6}$ vaut la sixiéme partie de trois unités ; puisque pour avoir la sixiéme partie de 3, il faudroit le diviser par 6 (41) : or il est évident que la sixiéme partie de trois unités, ou trois fois la sixiéme partie d'une unité, sont la même chose. Pour la même raison la fraction improprement dite $\frac{6}{3}$ vaut six tiers d'unité, ou deux unités. Nous énoncerons donc les fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{12}$, &c. par ces mots, deux tiers, trois quarts, quatre cinquiémes, un douziéme &c. de l'unité.

78. *Les dénominateurs de deux fractions étant égaux, celle qui a un plus grand numérateur est dans la même proportion plus grande; & les numérateurs étant égaux, celle qui a le dénominateur plus grand est dans la même proportion plus petite :* ainsi $\frac{4}{6}$ est double de $\frac{2}{6}$, & $\frac{2}{6}$ n'est que la moitié de $\frac{2}{3}$; car dans le premier cas l'espece des parties de l'unité que valent les deux fractions est la même; mais le nombre de ces parties dans la fraction qui a un plus grand numérateur est dans la même proportion plus grand (77); & dans le second cas le nombre des parties de l'unité que valent les deux fractions est le même; mais l'espéce de ces parties, dans la fraction qui a un plus grand dénominateur, est dans la même proportion plus petite (77).

79. *La valeur d'une fraction ne change pas, soit qu'on en multiplie ou qu'on en divise les deux termes par une même quantité :* ainsi $\frac{2}{3} = \frac{2\times4}{3\times4} = \frac{8}{12}$, & réciproquement $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$; car dans le premier cas autant que le nombre des parties de l'unité que vaut la fraction est augmenté par la multiplication du numérateur, autant l'espéce de ces parties devient plus petite par la multiplication du dénominateur; & dans le second cas autant que le nombre des parties de l'unité que vaut la fraction devient plus petit par la division du numérateur, autant l'espece en devient plus grande par la division du dénominateur.

DE LA RÉDUCTION.

80. ON *fait subir par la réduction divers changemens aux deux termes d'une fraction, sans en changer la valeur.* Ainsi la réduction est bonne toutes les fois que

la valeur de la fraction ou de la grandeur qu'on réduit demeure la même après la réduction qu'auparavant.

81. *On peut réduire tout entier en fraction en lui donnant l'unité pour dénominateur* : ainsi 4 peut être réduit à $\frac{4}{1}$; car $\frac{4}{1}=4$.

* 82. *Pour réduire un entier b en fraction avec un dénominateur déterminé c, il faut multiplier b par ce dénominateur, & mettre le produit bc en fraction sur le dénominateur donné*; car $\frac{bc}{c}=b$.

83. *Pour réduire en une fraction seule un entier joint à une fraction*, comme $a+\frac{b}{c}$, *il faut multiplier l'entier a par le dénominateur c de la fraction, ajouter le produit ac au numérateur b, & donner à la somme ac+b le dénominateur de la fraction*; car $\frac{ac+b}{c}=a+\frac{b}{c}$.

84. *Pour réduire plusieurs fractions au même dénominateur, il faut multiplier les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres.* De cette façon on réduira ces trois fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, à celles-ci $\frac{adf}{bdf}$, $\frac{bdc}{bdf}$, $\frac{bde}{bdf}$; car ces trois dernieres fractions sont égales aux trois premieres chacune à chacune, puisque les deux termes de chacune ayant été multipliés par la même quantité (sçavoir ceux de la premiere par df, ceux de la seconde par bf, ceux de la troisiéme par bd,) elles ont toutes conservé leur premiere valeur (79). De même les fractions $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ se réduisent à celles-ci $\frac{15}{30}$ $\frac{20}{30}$ $\frac{24}{30}$, qui ont le même dénominateur.

* *On réduiroit plusieurs fractions au même numérateur, en multipliant les deux termes de chacune par le produit des numérateurs des autres fractions.*

* 85. *Pour réduire une fraction à une expression plus simple, il faut en diviser, s'il est possible, les deux termes*

par une même quantité. Ainsi les fractions $\frac{6b^2cde}{2b^2cf}$, $\frac{6abc}{4ab}$, $\frac{ab}{abc}$ se réduisent à celles-ci $\frac{3de}{f}$, $\frac{3c}{2}$, $\frac{1}{c}$ en divisant les deux termes de la premiere par $2b^2c$, ceux de la seconde par $2ab$, ceux de la troisiéme par ab; & la fraction $\frac{3a^2b^3c + ab^3d - b^3}{b^3 + a^2b^3d}$ se réduit à $\frac{3a^2c + ad - 1}{1 + a^2d}$, en divisant ses deux termes par b^3.

* 86. *Pour connoître tout d'un coup le diviseur commun des deux termes d'une fraction numérique, il suffira d'observer* ..... 1°. *que tout nombre pair est divisible par* 2; & par conséquent si les deux termes d'une fraction sont des nombres pairs, il faut prendre la moitié de chacun, & continuer toujours ainsi la division, jusqu'à ce que l'un d'eux devienne impair : ainsi $\frac{64}{80}$ devient successivement $\frac{32}{40}$, $\frac{16}{20}$, $\frac{8}{10}$, $\frac{4}{5}$.

2°. *Que tout nombre terminé par* 0 *est divisible par* 10 *& par* 5; *s'il est terminé par* 5, *il est divisible par* 5. Ainsi $\frac{30}{40}$ se réduit à $\frac{3}{4}$, & $\frac{15}{85}$ à $\frac{3}{17}$.

3°. *Que tout nombre tel que la somme de ses chiffres est* 3, 6, 9, 12, 15, 18, *&c. est divisible par* 3; ainsi $\frac{33}{39}$ se réduit à $\frac{11}{13}$, parce que la somme des chiffres du numérateur est 6, & celle des chiffres du dénominateur est 12.

DE L'ADDITION ET DE LA SOUSTRACTION.

87. La somme des fractions $\frac{3}{6}$ & $\frac{2}{6}$ est évidemment $\frac{5}{6}$, leur différence est $\frac{1}{6}$; & en général *pour ajouter plu-*

ſieurs fractions réduites au même dénominateur, ou pour les ſouſtraire l'une de l'autre, il faut donner à la ſomme ou à la différence de leurs numérateurs le dénominateur commun. Si les fractions propoſées ne ſont pas réduites au même dénominateur, il faut les y réduire (84). Ainſi pour ajouter les fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, je les réduis à celles-ci $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$; & leur ſomme ſera $\frac{ad+bc}{bd}$, leur différence ſera $\frac{ad-bc}{bd}$. La ſomme de ces deux-ci $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{3}$ ſera $\frac{12+10}{15}$ ou $\frac{22}{15}$, leur différence ſera $\frac{12}{15}-\frac{10}{15}$ ou $\frac{2}{15}$.

* 88. *S'il faut ſouſtraire une fraction d'une autre plus petite, mais précédée d'un entier, il faut réduire une unité de cet entier & ſa fraction en une fraction ſeule* (83), *& faire la ſouſtraction de ces deux fractions à l'ordinaire* (87). Ainſi pour ſouſtraire $\frac{3}{4}$ de $3\,\frac{2}{3}$, je change $3\,\frac{2}{3}$ en $2+1\,\frac{2}{3}$, ou (83) en $2\,\frac{5}{3}$. Je ſouſtrais enſuite à l'ordinaire $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{3}$; la différence de ces fractions eſt $\frac{11}{12}$, & la différence totale des grandeurs propoſées eſt $2\,\frac{11}{12}$.

* 89. *Pour ſouſtraire une fraction d'un entier, il faut réduire une unité de cet entier à* $\frac{1}{1}$ *& opérer enſuite à l'ordinaire.*

* 90. *Enfin pour ajouter deux entiers avec leurs fractions, ou pour les ſouſtraire l'un de l'autre, il faut écrire la ſomme, ou la différence des entiers à la tête de la ſomme ou de la différence des fractions qui les accompagnent.*



DE LA MULTIPLICATION ET DE LA DIVISION.

91. **P**OUR *multiplier une fraction par un entier, il faut en multiplier le numérateur, ou en diviser le dénominateur par cet entier;* ainsi $\frac{4}{6} \times 2 = \frac{8}{6}$ ou $\frac{4}{3}$; car pour multiplier la fraction $\frac{4}{6}$ par 2, ou, ce qui revient au même, pour la rendre deux fois plus grande, il faut rendre son numérateur deux fois plus grand, ou son dénominateur deux fois plus petit (78). *C'est donc multiplier une fraction par son dénominateur que de l'effacer*; car $\frac{a}{b} \times b = \frac{ab}{b} = a$.

92. *Pour multiplier une fraction par une autre, il faut mettre le produit de leurs numérateurs en fraction sur celui de leurs dénominateurs:* ainsi $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ & $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$; car s'il falloit multiplier $\frac{2}{3}$ par 3, le produit seroit $\frac{6}{3}$ (91); mais le multiplicateur devenant le quart de 3, ou $\frac{3}{4}$, le produit de $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$ doit devenir quatre fois plus petit (22) que le produit $\frac{6}{3}$ de $\frac{2}{3}$ par 3 : or pour rendre $\frac{6}{3}$ quatre fois plus petit, il faut multiplier le dénominateur par 4 (78), & par conséquent écrire $\frac{6}{12}$.

93. *Mais pour diviser une fraction par un entier, il faut en diviser le numérateur, ou en multiplier le dénominateur par cet entier*, ainsi $\frac{4}{6} : 2 = \frac{2}{6}$ ou $\frac{4}{12}$; car pour diviser la fraction $\frac{4}{6}$ par 2, ou, ce qui revient au même, pour la rendre deux fois plus petite, il faut rendre son numérateur deux fois plus petit, ou son dénominateur deux fois plus grand (78).

94. *Pour diviser une fraction par une autre, il faut mettre le produit du numérateur de la fraction qui sert de dividende par le dénominateur de l'autre en fraction sur*

le produit du numérateur de la seconde par le dénominateur de la premiere; cela s'appelle *en multiplier les termes en croix*. Ainsi $\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$; car s'il falloit diviser $\frac{2}{3}$ par 3, le quotient seroit $\frac{2}{9}$ (93); mais le diviseur devenant le quart de 3, ou $\frac{3}{4}$, le quotient de $\frac{2}{3}$ par $\frac{3}{4}$ doit devenir quatre fois plus grand (30) que le quotient $\frac{2}{9}$ de $\frac{2}{3}$ par 3 : or pour rendre $\frac{2}{9}$ quatre fois plus grand, il faut multiplier le numérateur par 4 (78), & par conséquent écrire $\frac{8}{9}$.

* 95. *Enfin si les fractions qu'on multiplie ou qu'on divise l'une par l'autre sont précédées chacune d'un entier, il faut réduire chaque entier & sa fraction en une fraction seule* (83), *& opérer ensuite à l'ordinaire* (92 *ou* 94). Ainsi $4\frac{2}{3} \times 5\frac{1}{2} = \frac{14}{3} \times \frac{11}{2} = \frac{154}{6} = \frac{77}{3}$ (86) & $\overline{a + \frac{b}{c}} \times \overline{c + \frac{b}{d}} = \frac{\overline{ac + b}}{c} \times \frac{\overline{cd + b}}{d} = \frac{ac^2d + cbd + acb + b^2}{cd}$.

DES PUISSANCES
ET DES RACINES DES FRACTIONS.

96. Pour *élever une fraction à une puissance quelconque, ou pour en extraire une racine quelconque, il faut élever à cette puissance, ou extraire cette racine de chacun de ses termes*. Ainsi le quarré de la fraction $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^2}{b^2}$, son cube est $\frac{a^3}{b^3}$, &c.; car $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, & $\frac{a^2}{b^2} \times \frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}$; en général on trouve en opérant ainsi la même fraction que si on formoit les puissances à l'ordinaire par la multiplication (62).

* 97. *Les deux termes d'une fraction réduite à l'expression la plus simple, & qui n'ont par conséquent pas de diviseur commun, n'en acquierent point par leur élévation à de plus hautes puissances*. Soient deux nombres

abc, *def*, dont l'un n'a de diviſeurs premiers que les nombres *a*, *b*, *c*, (j'entends par diviſeurs premiers, des nombres comme 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, &c. qui ne ſont diviſibles par aucun autre nombre, excepté l'unité qui les diviſe tous) & l'autre les nombres *d*, *e*, *f*, il eſt clair que les deux nombres *abc*, *def* n'auront de diviſeur outre leurs diviſeurs premiers que leurs différens produits, ſçavoir l'un les produits *ab*, *ac*, *bc*, *abc*, & l'autre les produits *de*, *df*, *ef*, *def*, néceſſairement différens des autres, puiſque les diviſeurs premiers de ces deux nombres le ſont auſſi : donc $\frac{abc}{def}$ repréſente toute fraction numérique réduite à l'expreſſion la plus ſimple ; or les deux termes de ſon quarré $\frac{a^2b^2c^2}{d^2e^2f^2}$, ou en général de ſa puiſſance *n* $\frac{a^nb^nc^n}{d^ne^nf^n}$ n'ont pas non plus de commun diviſeur, puiſque chacun d'eux n'a de diviſeur que les diviſeurs de ſa racine & leurs divers produits néceſſairement différens des diviſeurs de l'autre, puiſque les diviſeurs des deux racines ſont tous différens.

* 98. *Une fraction proprement dite ne peut pas devenir un entier par ſon élévation à de plus hautes puiſſances ; il en eſt de même d'un entier joint à une fraction réduite à l'expreſſion la plus ſimple.* Car 1°. une fraction proprement dite valant moins qu'une unité (76), ſa puiſſance quelconque vaudra moins que 1, puiſque la puiſſance quelconque de 1 eſt 1. 2°. Si l'on réduit en une fraction ſeule (83) un entier *a* joint à une fraction $\frac{b}{c}$ réduite à l'expreſſion la plus ſimple, les deux termes de cette nouvelle fraction $\frac{ac+b}{c}$ n'auront pas de commun diviſeur, puiſqu'on ne pourra retrouver par la diviſion que $a+\frac{b}{c}$, & ils n'en acquerront pas par leur

élévation à de plus hautes puissances (97) ; cependant afin qu'une fraction improprement dite devienne un entier, il faut que ses deux termes ayent un commun diviseur égal au dénominateur. Donc, &c.

* 99. *Les nombres* 2, 3, 5, 7, 8, 10, &c. *qui remplissent les intervalles des nombres quarrés*, 1, 4, 9, 16, 25, 36, &c. *ne sont que des quarrés imparfaits, c'est-à-dire des nombres dont on ne peut exprimer la racine quarrée par aucun nombre possible*; car cette racine n'est pas un entier; puisqu'il n'y a pas de nombre entier qui multiplié par lui-même donne quelqu'un des nombres dont nous parlons ; ce n'est pas non plus une fraction, ni un entier joint à une fraction (98).

* 100. *Le produit d'un quarré parfait* aa *par un quarré imparfait* xx *n'est qu'un quarré imparfait*; car si $aaxx$ étoit un quarré parfait ; sa racine ax seroit un nombre connu ; & l'un a des produisans de cette racine étant aussi connu, puisque aa est un quarré parfait, l'autre produisant x seroit aussi connu ; & partant xx ne seroit pas un quarré imparfait, comme on le suppose.

* 101. *Il ne peut y avoir de quarré parfait double, triple, quintuple, &c. d'un autre quarré parfait* ; ainsi a^2 étant un quarré parfait $2a^2$ $3a^2$ $5a^2$, &c. ne sont que des quarrés imparfaits (100), puisqu'ils sont les produits d'un quarré parfait a^2 par les quarrés imparfaits 2, 3, 5, &c. (99).

* 102. *La racine d'un quarré imparfait n'a avec aucun nombre de commune mesure*. Je m'explique : tous les nombres entiers ont au moins l'unité pour mesure commune, ou bien l'unité prise un certain nombre de fois mesure exactement toutes sortes de nombres entiers. Il en est qui ont pour mesure commune des nombres entiers : ainsi 18 & 21 ont pour mesure commune 3 ; mais la racine d'un quarré imparfait est telle que ni l'unité

ni une partie de l'unité, quelque petite qu'elle soit, ne la mesure exactement, & par conséquent elle n'a avec aucun nombre de mesure commune ; car 1°. si cette mesure commune étoit l'unité, la racine dont il s'agit vaudroit un entier : 2°. si c'étoit une partie de l'unité, la milliéme par exemple, ou $\frac{1}{1000}$, & que cette mesure prise trente fois, par exemple, égalât la racine en question, elle vaudroit la fraction $\frac{30}{1000}$: 3°. si cette mesure commune étoit l'unité jointe à une fraction, à $\frac{1}{1000}$ par exemple, & que cette mesure prise trente fois égalât la racine du quarré imparfait, elle vaudroit 30 $\frac{30}{1000}$, c'est-à-dire un entier joint à une fraction : or les racines des quarrés imparfaits ne peuvent être ni des entiers, ni des fractions, ni des entiers joints à des fractions (99) : donc les racines des quarrés imparfaits n'ont avec aucun nombre de commune mesure ; c'est pour cela qu'on les appelle des *incommensurables*. On les exprime par le signe radical $\sqrt{}$, en cette sorte, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{10}$, &c.



LEÇON CINQUIE'ME.

Des raisons & des proportions.

NOTIONS PRE'LIMINAIRES.

103. L*e quotient d'une grandeur a divisée par une autre b est le* rapport ou *la raison géométrique de la premiere à la seconde* : on l'écrit ainsi, $\frac{a}{b}$ ou $a : b$: : *La différence de ces grandeurs est leur raison arithmétique*,

qui s'écrit ainſi, *a . b* : ; 3 eſt donc la raiſon géométrique de 12 à 4, & 8 eſt leur raiſon arithmétique. On appelle dans ce cas 12 *l'antécédent*, & 4 *le conſéquent* de la raiſon.

104. *L'égalité de deux raiſons forme une proportion, qui eſt géométrique ou arithmétique, ſelon l'eſpéce de ces deux raiſons.* Ainſi la raiſon géométrique de 12 à 4 étant 3, comme celle de 15 à 5, les deux raiſons $\frac{12}{4}$ & $\frac{15}{5}$ forment une proportion géométrique qui s'écrit ainſi : $\frac{12}{4} = \frac{15}{5}$, ou plus communément ainſi, 12 : 4 : : 15 : 5 ; on l'énonce ainſi, 12 eſt à 4 comme 15 eſt à 5. La raiſon arithmétique de 5 à 3 étant 2, comme celle de 9 à 7, ces deux raiſons forment une proportion arithmétique, qui s'écrit ainſi, 5 . 3 : 9 . 7 ; on l'énonce ainſi, 5 eſt arithmétiquement à 3 comme 9 eſt à 7. Lorſqu'on parle d'une raiſon ou d'une proportion, ſans la ſpécifier, on entend toujours la géométrique.

105. Le premier & le quatriéme terme d'une proportion en ſont les *extrêmes*, le ſecond & le troiſiéme en ſont les *moyens*. Lorſque dans une proportion la même grandeur ſe trouve conſéquent de la premiere raiſon & antécédent de la ſuivante, elle s'appelle *moyen proportionel*, & la proportion ſe nomme *continue* ; en voici une, 16 : 8 : : 8 : 4. On l'écrit plus briévement ainſi, ∺ 16 . 8 . 4, lorſqu'elle eſt géométrique, & en cette ſorte, ÷ 16 . 12 . 8, lorſqu'elle eſt arithmétique.

106. Si le troiſiéme terme d'une proportion continue devient lui-même un moyen proportionnel entre le ſecond terme & un quatriéme, & ſi le quatriéme eſt encore moyen proportionnel entre le troiſiéme & le cinquiéme, ainſi du reſte, cette ſuite de termes forme une *progreſſion*, dont l'eſpéce dépend de celle des raiſons qui la compoſent. Celle-ci ∺ 16 . 8 . 4 . 2 . 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$,

&c.

&c. est géométrique, & celle-ci ÷ 16.12.8.4.0. —4—8, &c. est arithmétique. On énonce la premiere ainsi, 16 est à 8 comme 8 est à 4, comme 4 est à 2, comme 2 est à 1, &c. & la seconde ainsi, 16 est arithmétiquement à 12 comme 12 est à 8, comme 8 est à 4, comme 4 est à 0, &c.

107. Il suit du n°. précédent, *qu'une progression géométrique ou arithmétique est une suite de raisons géométriques ou arithmétiques égales, dans laquelle chaque terme compris entre le premier & le dernier est moyen proportionnel entre celui qui le précéde & celui qui le suit immédiatement, & par conséquent une suite de termes, qui pris consécutivement ont le même quotient ou la même différence;* ce qui distingue la progression d'une simple suite de raisons égales, comme celle ci, 32 : 16 :: 8 : 4 :: 10 : 5 :: 6 : 3 :: &c. qu'on énonce ainsi, 32 est à 16, comme 8 est à 4, comme 10 est à 5, comme 6 est à 3, dans laquelle chaque terme compris entre le premier & le dernier n'est pas moyen proportionnel entre celui qui le précéde & celui qui le suit immédiatement, ou bien encore dans laquelle les termes pris consécutivement (c'est-à-dire le premier avec le second, le second avec le troisiéme, le troisiéme avec le quatriéme, &c.) n'ont pas le même quotient, mais seulement pris deux à deux, c'est-à-dire le premier avec le second, le troisiéme avec le quatriéme, le cinquiéme avec le sixiéme, &c.

108. *Si les antécédens sont plus petits que les conséquens, il y aura proportion géométrique lorsqu'ils en seront des parties semblables;* car dans ce cas les deux raisons deviendront la même par leur réduction à l'expression la plus simple. Par exemple, on a la proportion 5 : 15 :: 4 : 12; car les antécédens étant le tiers de leurs conséquens, les raisons $\frac{5}{15}$ & $\frac{4}{12}$ se réduiront chacune à $\frac{1}{3}$, & partant $\frac{5}{15} = \frac{4}{12}$ ou 5 : 15 :: 4 : 12; cela

s'appelle une proportion croissante. *Il y a aussi proportion arithmétique, lorsque les antécédens sont moindres que leurs conséquens de la même quantité;* car dans ce cas chaque conséquent soustrait de son antécédent donne la même différence négative; ainsi on a 7 . 9 : 3 . 5; car 7—9 = —2, comme 3—5. Il y a de même des progressions croissantes, tant géométriques qu'arithmétiques : en voici une de chaque espéce; ∺ 1 . 2 . 4 . 8 . 16, &c. ÷ 4 . 8 . 12 . 16 . 20. &c.

109. Si quatre grandeurs sont disposées de façon que, sans les déranger, elles forment une proportion, on dit que les deux premieres sont en *raison directe* des deux dernieres, ou qu'elles leur sont *directement* proportionnelles; mais si ces grandeurs sont disposées de façon que pour former une proportion il faille renverser l'ordre des deux dernieres, on dit que les deux premieres sont en *raison inverse* des deux dernieres, ou qu'elles leur sont *réciproquement* proportionnelles. Ainsi si les masses *M*, *m*, & les vitesses *V*, *u*, de deux corps A & B donnent cette proportion, la masse de A est à la masse de B, comme la vitesse de A est à la vitesse de B, ou *M* : *m* :: *V* : *u*. Je dis que leurs masses sont en raison directe des vitesses, parce que la masse de A étant l'antécédent de la raison des masses, l'ordre naturel demande que la vitesse de A soit aussi l'antécédent de la raison des vitesses; mais si la masse de A est à la masse de B, comme la vitesse de B est à la vitesse de A, ou *M* : *m* :: *u* : *V*, je dis que les masses de ces corps sont en raison inverse de leur vitesse, ou que ces deux corps sont en raison réciproque de masse & de vitesse, parce que j'ai dérangé l'ordre naturel des deux derniers termes qui faisoient la raison des vitesses.

110. Si le quotient de deux grandeurs est double, triple, quadruple, &c. ou sous-double, sous-triple, sous-quadruple, &c. du quotient de deux autres gran-

deurs, on dit que les deux premieres sont en *raison double*, *triple*, *quadruple*, &c. *ou sous-double*, *sous triple*, *sous-quadruple*, &c. des deux dernieres. Ainsi 24 est à 6 en raison double de 8 à 4, & 8 est à 4 en raison sous-double de 24 à 6.

* 111. On appelle *raison de nombre à nombre* celle dont les deux termes sont commensurables, comme la raison de 4 à 2; & *raison sourde ou irrationelle* celle dont l'un des termes est incommensurable, comme la raison de 4 à $\sqrt{2}$, parce que dans ce cas on ne peut exprimer par aucun nombre possible la grandeur incommensurable (99), ni par conséquent la valeur de la raison; cependant la raison de deux incommensurables peut être une raison de nombre à nombre, par exemple $\frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}$ se réduit à la raison $\frac{2}{5}$, qui est de nombre à nombre, en divisant les deux termes de la premiere fraction par $\sqrt{3}$ (79).

Propriétés des raisons géométriques.

112. La valeur d'une raison étant le quotient de son antécédent divisé par le conséquent (103), *on peut regarder une raison comme une grandeur déterminée*, & par conséquent on a les axiomes suivans.

113. 1°. *Si deux raisons sont chacune égales à une troisiéme, elles sont égales entr'elles.*

114. 2°. *Si de plusieurs raisons la premiere est égale à la seconde, la seconde à la troisiéme, la troisiéme à la quatriéme, &c. la premiere est égale à la derniere, & elles sont toutes égales entr'elles.*

115. 3°. *Si deux raisons sont égales, elles ont un même rapport à une troisiéme.*

116. *La raiſon de deux touts eſt la même que celle* de leurs moitiés, de leurs tiers, de leurs quarts, en un mot *de leurs parties ſemblables*; car la moitié, le tiers, le quart, en un mot une partie quelconque d'un tout contient autant de fois une partie ſemblable d'un autre tout que le premier tout contient le ſecond.

117. *La raiſon de deux parties ſemblables de deux touts eſt la même que celle de deux autres parties ſemblables des mêmes touts;* car la raiſon des moitiés, par exemple, de deux touts, eſt la même que celle de ces touts; pareillement la raiſon de ces touts eſt la même que celle de leurs tiers (116) : donc (113) la raiſon des moitiés eſt la même que celle des tiers. On trouve par le même raiſonnement qu'en général la raiſon, &c.

118. *Les conſéquents de deux raiſons étant égaux, leurs valeurs* Q, q, *ſont en raiſon directe des antécédens* A, a, c'eſt-à-dire Q : q : : A : a, *& les antécédens étant égaux, leurs valeurs ſont en raiſon inverſe des conſéquens* C, c, c'eſt-à-dire Q : q : : c : C (78); puiſqu'une raiſon eſt une fraction proprement ou improprement dite, dont le numérateur eſt l'antécédent, & le dénominateur le conſéquent.

119. Pour la même raiſon *on ne change pas la valeur d'une raiſon, ſoit qu'on en multiplie, ou qu'on en diviſe les deux termes par la même quantité.* Ainſi $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, ou $a : b : : ac : bc$; de même $a : b : : \frac{a}{c} : \frac{b}{c}$; ce qu'on peut encore exprimer ainſi.

Deux grandeurs a *&* b *ſont entr'elles comme les produits* ac, bc, *ou les quotiens* $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ *de ces grandeurs multipliées ou diviſées par la même quantité* c.

120. *Toute raiſon géométrique peut ſe réduire à la formule* $\frac{bn}{b}$ ou $bn : b$: : car le conſéquent de toute raiſon géométrique peut être exprimé par b, tout

quotient de l'antécédent divisé par le conséquent peut être exprimé par n, & par conséquent tout antécédent par bn, puisque le produit du quotient par le diviseur est égal au dividende (36) : donc l'expression entiere de la raison sera $\frac{bn}{b}$. Pour voir plus clairement comment $\frac{bn}{b}$ peut exprimer toute raison géométrique, il faut remarquer que si l'antécédent contient un certain nombre de fois juste son conséquent (1er ex.) n vaut un nombre entier ; si l'antécédent est moindre que le conséquent (2e ex.), n vaut une fraction ; si l'antécédent contient un certain nombre de fois son conséquent avec un reste (3e ex.), n vaut un entier joint à une fraction ; enfin si l'antécédent est égal au conséquent (4e ex.), n vaut l'unité ; & dans tous ces cas si l'on multiplie le nombre désigné par b par le nombre qu'exprime n, on retrouve l'antécédent qui par conséquent peut être exprimé dans tous les cas par bn.

1er exemp.	*2e exemp.*	*3e exemp.*	*4e exemp.*
$.\,bn$	$.\,bn$	$.\,bn$	$.\,bn$
$\frac{12}{4} = 3\,.\,n.$	$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}\,.\,n.$	$\frac{13}{4} = 3\frac{1}{3}\,.\,n.$	$\frac{12}{12} = 1\,.\,n$
$.\,b.$	$.\,b$	$.\,b$	$.\,b$

Il est évident par les mêmes raisons qu'au lieu de la formule $\frac{bn}{b}$, je pourrois prendre $\frac{cn}{c}$, ou même $\frac{dm}{d}$, ou toute autre pareille.

122. Le produit de plusieurs raisons s'appelle raison composée de ces raisons ; ainsi $\frac{bncm}{bc}$ est la raison composée des raisons $\frac{bn}{b}$, $\frac{cm}{c}$; *& la valeur d'une raison composée est le produit des valeurs des raisons simples qui la composent* ; car la raison $\frac{bncm}{bc}$ vaut nm, produit des valeurs nm des raisons composantes $\frac{bn}{b}$, $\frac{cm}{c}$. La raison

des masses de deux corps étant $\frac{M}{m}$, la raison des vitesses étant $\frac{V}{u}$, la raison composée des masses & des vitesses est $\frac{MV}{m,u}$; la raison $\frac{Mu}{mV}$ est composée de la raison directe $\frac{M}{m}$ des masses, & de l'inverse $\frac{u}{V}$ des vitesses.

123. Le quarré d'une raison s'appelle raison *doublée* de la raison simple qui est sa racine ; le cube d'une raison en est la raison *triplée* ; ainsi la raison $\frac{b^2n^2}{b^2}$ est doublée, & la raison $\frac{b^3n^3}{b^3}$ triplée de la raison $\frac{bn}{b}$; *& la valeur de la raison doublée ou triplée est le quarré ou le cube de la valeur de sa racine* ; car $\frac{b^2n^2}{b^2}$ vaut n^2, quarré de la valeur n de $\frac{bn}{b}$, & $\frac{b^3n^3}{b^3}$, vaut n^3 ; cube de la valeur n de $\frac{bn}{b}$. Au contraire la racine quarrée ou cubique d'une raison est appellée *sous-doublée* ou *sous-triplée* de cette raison ; ainsi la raison $\frac{bn}{b}$ est sous-doublée de $\frac{b^2n^2}{b^2}$, & sous-triplée de $\frac{b^3n^3}{b^3}$; & *la valeur n de la raison $\frac{bn}{b}$ sous-doublée ou sous-triplée est la racine quarrée ou cubique de la valeur n^2 ou n^3 du quarré $\frac{b^2n^2}{b^2}$ ou du cube $\frac{b^3n^3}{b^3}$ de cette raison.*

124. Il suit de la définition des raisons composées, doublées, triplées, sous-doublées, sous-triplées ; 1°. *que la raison $\frac{abc}{def}$ composée de plusieurs autres $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{e}$, $\frac{c}{f}$ est la même que celle du produit des antécédens au produit des conséquens des raisons composantes.*

2°. *Que la raiſon* $\frac{aa}{bb}$ ou $\frac{a^3}{b^3}$ *doublée ou triplée d'une autre* $\frac{a}{b}$ *eſt la même que celle qui ſe trouve entre les quarrés ou les cubes des termes de cette autre raiſon.*

3°. *Que la raiſon* $\frac{bn}{b}$ *ſous-doublée ou ſous-triplée d'une autre* $\frac{b^2n^2}{b^2}$ *ou* $\frac{b^3n^3}{b^3}$ *eſt la même que celle qui ſe trouve entre les racines quarrées ou cubiques des termes de cette autre raiſon.*

4°. *Que la raiſon composée de deux ou trois raiſons égales eſt doublée ou triplée de l'une d'elles, ou, ce qui revient du même, que cette raiſon eſt égale à celle des quarrés ou des cubes des termes d'une des raiſons composantes;* car ſoient les deux raiſons égales $\frac{bn}{b}$, $\frac{cn}{c}$, la raiſon composée eſt $\frac{bncn}{bc}$ dont la valeur eſt un; comme celle de $\frac{b^2n^2}{b^2}$, ou de $\frac{c^2n^2}{c^2}$, la raiſon composée de trois raiſons égales $\frac{bn}{b}$, $\frac{cn}{c}$, $\frac{dn}{d}$ eſt $\frac{bcdn^3}{bcd}$, dont la valeur eſt n^3, comme celle de $\frac{b^3n^3}{b^3}$ ou de $\frac{c^3n^3}{c^3}$ ou de $\frac{d^3n^3}{d^3}$.

Proprietés des proportions géométriques.

125. TOUTE proportion géométrique peut ſe réduire à la formule $\frac{bn}{b} = \frac{cn}{c}$ ou $bn : b :: cn : c$. Car les deux raiſons que contient la formule ſont égales, puiſqu'elles ont le même quotient n; & d'ailleurs elles repréſentent chacune toute ſorte de raiſons (121); donc la formule repréſente l'égalité de deux raiſons

géométriques quelconques, ou ce qui est la même chose (104), toute proportion géométrique.

Il est évident pour les mêmes raisons, que toute proportion géométrique pourroit se réduire également à celle-ci, $dn : d :: en : e$, ou même à cette autre $am : a :: bm : b$, ou à toute autre pareille.

126. *Dans toute proportion géométrique le produit des extrêmes est égal au produit des moyens*; car dans la formule $bn : b :: cn : c$, l'un & l'autre produit est bcn; ainsi si l'on a la proportion $a : b :: c : d$, on a aussi l'équation $ad = bc$.

Ceci paroîtra plus évident dans un exemple. Soit la proportion $12 : 4 :: 15 : 5$, dans laquelle chaque raison vaut 3, les antécédens 12 & 15 seront donc l'un 3×4 & l'autre 3×5 (36); & partant la proportion $12 : 4 :: 15 : 5$ se réduit à celle-ci; $3 \times 4 : 4 :: 3 \times 5 : 5$ parfaitement représentée par la somme $bn : b :: cn : c$; or dans la derniere proportion numérique le produit des extrêmes est évidemment $3 \times 4 \times 5$, comme celui des moyens. On pourra de même démontrer que les produits des extrêmes & des moyens dans toute proportion géométrique sont composés des mêmes nombres, comme ces produits dans la formule le sont des mêmes lettres, & qu'ils sont par conséquent égaux.

127. *Dans toute proportion continue* $\div\!\!\div\, a . b . c .$ *le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen proportionnel*, ou bien $ac = b^2$; car la proportion continue $\div\!\!\div\, a . b . c .$ n'est autre chose que la proportion $a : b :: b : c$ (105), qui donne (126) $ac = b^2$.

128. *Toutes les fois que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre grandeurs sont nécessairement proportionnelles.* Quatre grandeurs quelconques peuvent être exprimées par celles-ci, bn, b, cm, c (121); or si on a $bcn = bcm$, en divisant l'un & l'autre membre de l'équation par bc, on aura $n = m$, &

par conséquent $\frac{bn}{b} = \frac{cm}{c}$, ou $bn : b :: cm : c$.

129. *Toute équation peut être changée en proportion*; car on peut regarder chaque membre de l'équation comme le produit de deux grandeurs, & partant former une proportion, dont les extrêmes soient les deux produisans d'un membre, & les moyens les deux produisans de l'autre, puisque toutes les fois que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens, les quatre grandeurs sont proportionnelles (128). Ainsi l'équation $ad = bc$ peut être changée en cette proportion, $a : b :: c : d$; celle-ci, $ac = b^2$, peut devenir $a : b :: b : c$, & celle-ci, $bc = d$, peut devenir $b : d :: 1 : c$.

130. *On peut, sans détruire une proportion*, 1°. *changer l'arrangement de ses termes autant de fois qu'il est possible, en conservant les mêmes moyens & les mêmes extrêmes, ou en faisant des deux moyens les deux extrêmes, & des deux extrêmes les deux moyens*; car dans tous ces cas le produit des extrêmes demeure égal au produit des moyens, & par conséquent (128) la proportion subsiste toujours. Cet arrangement différent de termes donne les huit proportions suivantes, $bn : b :: cn : c$, $bn : cn :: b : c$, $c : cn :: b : bn$, $c : b :: cn : bn$, $cn : c :: bn : b$, $cn : bn :: c : b$, $b : bn :: c : cn$, $b : c :: bn : cn$.

131. 2°. Lui faire subir les changemens suivans, communément appellés *addendo*, *subtrahendo*, *multiplicando*, *dividendo*.

Addendo . . . . $bn + b : b :: cn + c : c$.
Subtrahendo . . . $bn - b : b :: cn - c : c$.
Multiplicando . . $bnx : b :: cnx : c$.
Dividendo . . . $\frac{bn}{x} : \frac{b}{x} :: cn : c$.

Car on trouve toujours le produit des extrêmes égal

au produit des moyens. Chacune de ces proportions pourroit encore subir tous les changemens dont nous avons parlé dans le n°. précédent.

132. 3°. *En multiplier ou en diviser les quatre termes par les termes correspondans d'une autre proportion*; car si on multiplie les termes de la proportion $bn : b :: cn : c$, par les termes correspondans de celle-ci $dm : d :: em : e$, on aura la nouvelle proportion $bdmn : bd :: cemn : ce$; & si on divise les termes de la premiere par les termes de la seconde, on aura aussi $\frac{bn}{dm} : \frac{b}{d} :: \frac{cn}{em} : \frac{c}{e}$, puisque les deux raisons qui composent chacune de ces proportions ont le même quotient $\frac{n}{m}$, & que d'ailleurs le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.

133. 4°. *En élever les quatre termes à une même puissance quelconque, ou en extraire la même racine*; car si on éleve les quatre termes de la formule $bn : b :: cn : c$, à la puissance p on aura $b^p n^p : b^p :: c^p n^p : c^p$, puisque ces deux nouvelles raisons ont un même quotient n^p. Maintenant si l'on extrait la racine p des quatre termes de cette seconde proportion, on retrouve la premiere.

* 134. 5°. *Renverser l'ordre des deux premiers ou des deux derniers termes, pourvû qu'on en fasse les dénominateurs de deux fractions qui ayent l'unité ou une même quantité quelconque m pour numérateur.* Ainsi la proportion $bn : b :: cn : c$, peut être changée en celle-ci $bn : b :: \frac{1}{c} : \frac{1}{cn}$, ou en cette autre $\frac{m}{b} : \frac{m}{bn} :: cn : c$, puisque les deux raisons de chacune de ces proportions ont un même quotient n.

* 135. 6°. *Si deux de ses termes sont des fractions, en effacer les numérateurs, & renverser l'ordre des dénominateurs*; car la proportion $bn : b :: cn : c$, peut être changée en celle-ci, $bn : b :: \frac{1}{c} : \frac{1}{cn}$ (134) : donc cette

derniere à son tour peut reprendre la forme de la premiere, $bn : b :: cn : c$.

136. *Dans une suite de raisons égales la somme des antécédens est à la somme des conséquens comme un antécédent quelconque est à son conséquent*; car si chaque antécédent est double, triple, &c. ou la moitié, le tiers, &c. de chaque conséquent, il est nécessaire que la somme des antécédens soit double, triple, &c. ou la moitié, le tiers, &c. de la somme des conséquens.

137. *Dans toute proportion géométrique chaque extrême est égal au produit des moyens divisé par l'autre extrême, & chaque moyen au produit des extrêmes divisé par l'autre moyen*; car cela se trouve dans la formule $bn : b :: cn : c$., & par conséquent *étant connus trois termes quelconques dans une proportion, on connoît le quatriéme*. Cette méthode de trouver un terme inconnu d'une proportion s'appelle la *Régle de Trois*, ou la *Régle d'Or*, à cause de sa grande utilité dans les mathématiques. En voici l'application à quelques problêmes.

PROBLEME I.

138. *Vingt hommes ont fait 45 toises d'ouvrage; combien de toises feront soixante hommes dans le même tems?* Je compare d'abord entr'eux les termes homogenes, (ce qu'il faut bien observer dans les autres exemples), c'est-à-dire les toises aux toises, les hommes aux hommes; & comme il est évident que le nombre de toises doit augmenter dans la même proportion que le nombre des ouvriers, j'ai la proportion, vingt hommes sont à soixante hommes, comme 45 toises, ouvrage de vingt hommes, sont à x nombre inconnu de toises faites par soixante hommes, ou $20^h : 60^h :: 45^t : x^t$: donc (137) $x = \frac{60 \times 45}{20} = 135$ toises.

139. Dans l'exemple précédent les deux premiers

termes de la proportion sont en raison directe des deux autres : la Régle de Trois est alors *directe* ; mais si les deux premiers étoient en raison inverse des deux derniers, la Régle de Trois seroit *inverse* : en voici un exemple.

PROBLEME II.

Vingt hommes ont fait un certain ouvrage dans quinze jours ; en combien de jours soixante hommes feront-ils le même ouvrage ?

Je remarque que le nombre des jours qu'on cherche est d'autant plus petit que 15, que 60 est plus grand que 20, parce que la durée de l'ouvrage diminue dans la même proportion qu'augmente le nombre des ouvriers ; & par conséquent $20^h : 60^h :: x^i : 15^i$: donc (137) $x = \frac{20 \times 15}{60} = 5$ jours.

PROBLEME III.

* 140. *Quinze marcs trois onces d'argent valent 742 liv. 15 sols ; combien vaut chaque marc ?* Il est clair que le prix devant décroître en même proportion que le nombre des marcs, j'ai la proportion suivante : quinze marcs trois onces d'argent sont à un marc comme 742 liv. 15 sols, prix de quinze marcs trois onces, est à x, prix inconnu d'un marc, ou bien en changeant les marcs en onces & les livres en sols, (le marc contient 8 onces) $123^{on} : 8^{on} :: 14855^{sols} : x = \frac{14855^s \times 8}{123}$ $= 966^s., 2^d. \frac{18}{123}{}^d. = 48^l. 6^s. 2^d. \frac{18}{123}$.

PROBLEME IV.

* 141. *Chaque marc coutant* $48^{liv.}\ 6^{sols}\ 2^{den.}$ (j'ôte la fraction $\frac{18}{123}$ pour abreger le calcul), *combien coutent quinze marcs trois onces ?* Il ne faut que ren-

verser la proportion du n°. précédent, & réduire le prix du marc en deniers, & les marcs en onces, ce qui donne la proportion $8^{on} : 123^{on} :: 11594^{den.} : \frac{11594^{den.} \times 123}{8} = 14853$ f. 8 d. $= 742$ l. 13 f. 8 d.

PROBLEME V.

* 142. *Trois Marchands ont fait un fonds de 1250 livres; Pierre y a mis $400^{liv.}$, Jean $250^{liv.}$, André $600^{liv.}$, le fonds a donné $2000^{liv.}$ de gain; quel est le gain de chaque Marchand?*

J'observe que chaque marchand doit retirer du gain total à proportion de sa mise, c'est-à-dire que le fonds est à chaque mise comme le gain total est au gain de chaque marchand. Ces trois gains seront donc les quatriéme termes des trois proportions suivantes.

$$1250 : 400 :: 2000 : \frac{400 \times 2000}{1250} = 640^{liv.}.$$

$$1250 : 250 :: 2000 : \frac{250 \times 2000}{1250} = 400.$$

$$1250 : 600 :: 2000 : \frac{600 \times 2000}{1250} = 960.$$

Proprietés des progressions géométriques.

* 143. TOUTE progression géométrique peut se réduire à la formule $\div\!\!\div b . bn^1 . bn^2 . bn^3 . bn^4 . bn^5 . bn^6 .$ &c. car toute progression géométrique est une suite de termes qui pris consécutivement ont le même quotient (107); or c'est ce qui se trouve dans la formule, puisque chaque terme divisé par le précé-

dent donne au quotient n, & par le suivant $\frac{1}{n}$: cette formule forme donc une progreſſion géométrique ; & d'ailleurs les raiſons qui la compoſent pouvant exprimer toute raiſon géométrique, la formule entiere peut exprimer toute progreſſion géométrique.

* 144. *Si n eſt un nombre entier, la progreſſion eſt croiſſante ; elle eſt au contraire décroiſſante, ſi n eſt une fraction*, par exemple, ſi l'on fait dans la formule $b=2$, $n=3$, elle deviendra ∺ 2 . 6 . 18 . 54 . 162 . 486 &c. ; mais ſi $n=\frac{1}{2}$ & $b=16$, la formule deviendra ∺ 16 . 8 . 4 . 2 . 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. &c.

* 145. *Toutes les puiſſances ſucceſſives d'une même quantité ſont en progreſſion géométrique* ; car ſi on ſuppoſe que dans la formule $b=1$, elle devient ∺ 1 . n^1 . n^2 . n^3 . n^4 . n^5 . n^6, &c. ; or n peut exprimer une quantité quelconque. Donc, &c.

* 146. *Des termes compoſés des mêmes lettres, dont les expoſans forment une progreſſion ou proportion arithmétique, ſont en progreſſion ou en proportion géométrique.* Ainſi 1°. ∺ n^2 . n^4 . n^6 . n^8 . n^{10} . n^{12} . &c., puiſque ces termes pris conſécutivement ont le même quotient : 2°. $n^2 : n^5 :: n^4 : n^7$, puiſque le produit des extrêmes eſt égal au produit des moyens.

* 147. *Dans toute progreſſion géométrique le premier terme eſt au troiſiéme en raiſon doublée, & au quatriéme en raiſon triplée du premier au ſecond.* On trouve en effet dans la formule précédente $b : bn^2 :: b^2 : b^2 n^2$, & $b : bn^3 :: b^3 : b^3 n^3$, à cauſe du produit des extrêmes égal au produit des moyens ; or la raiſon $\frac{b^2}{b^2 n^2}$ eſt doublée, & la raiſon $\frac{b^3}{b^3 n^3}$ triplée de la raiſon $\frac{b}{bn}$ du premier terme b au ſecond bn (124). Donc, &c.

* 148. *Dans toute progreſſion géométrique le produit*

des extrêmes est égal au produit des termes également éloignés des extrêmes, du second par exemple & du pénultiéme, *ou au quarré du moyen proportionnel, si le nombre des termes est impair :* cela est évident à la seule inspection de la formule.

* 149. *Dans toute progression géométrique chaque terme*, le cinquiéme par exemple, bn^4, *est égal au produit du premier b par le quotient de la progression n élevé à la puissance* quatriéme, *qui est désignée par le nombre des termes précédens.* Voyez la formule.

Proprietés des proportions arithmétiques.

* 150. TOUTE *raison arithmétique peut se réduire à* la formule $b \,.\, b + d$, si l'antécédent est moindre que le conséquent ; à celle-ci $b \,.\, b - d$ si l'antécédent est plus grand que le conséquent, & *dans tous les cas à cette formule générale* $b \,.\, b \pm d$:
Car la différence des termes quelconques d'une raison arithmétique peut être exprimée par d, le plus petit terme par b, ou par $b - d$, & par conséquent le plus grand terme par $b + d$, ou par b (20) : donc l'expression entiere d'une raison quelconque est $b \,.\, b \pm d$.

Il est évident pour les mêmes raisons qu'au lieu de la formule précédente, je pourrois prendre celle-ci, $c \,.\, c \pm d$, ou cette autre, $e \,.\, e \pm f$, ou toute autre pareille.

* 151. *Toute proportion arithmétique peut être exprimée par la formule* $b \,.\, b \pm d : c \,.\, c \pm d$.
Car les deux raisons arithmétiques que contient la formule sont égales, puisqu'elles ont la même valeur d ; & d'ailleurs elles représentent chacune toute sorte de raisons (150) : donc la formule précédente repré-

ſente l'égalité de deux raiſons arithmétiques quelconques, ou ce qui revient au même (104), toute proportion arithmétique.

* 152. *Dans toute proportion arithmétique la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens*; car dans la formule l'une & l'autre ſomme eſt $b + c \pm d$. Ainſi ſi l'on a la proportion arithmétique $a \,.\, b : c \,.\, d$, on a auſſi $a+d=b+c$.

Ceci paroîtra plus évident dans un exemple. Soit la proportion 9 . 5 : 8 . 4, dans laquelle chaque raiſon vaut 4; la proportion étant décroiſſante, les conſéquens 5 & 4 ſeront donc l'un 9—4 & l'autre 8—4, & par conſéquent la proportion 9 . 5 : 8 . 4 ſe réduira à celle-ci, 9 . 9—4 : 8 . 8—4, parfaitement repréſentée par la formule $b \,.\, b-d : c \,.\, c-d$; or dans la derniere proportion numérique la ſomme des extrêmes eſt évidemment 9 + 8 — 4 comme celle des moyens, de même que dans la formule $b \,.\, b-d : c \,.\, c-d$, l'une & l'autre ſomme eſt $b+c-d$. On démontrera de même que la ſomme des extrêmes & des moyens de toute autre proportion décroiſſante eſt la ſomme des mêmes nombres, & l'on appliquera aiſément la même démonſtration à toute proportion croiſſante, comme ſeroit 5 . 9 : 4 . 8. Donc, &c.

* 153. *Dans toute proportion continue arithmétique* $\div$ *a . b . c . la ſomme des extrêmes eſt égale au double du moyen proportionnel*, ou bien $a + c = 2b$; car la proportion continue $\div a \,.\, b \,.\, c$. n'eſt autre choſe que la proportion $a \,.\, b : b \,.\, c$, qui donne (152) $a+c=2b$.

* 154. *Toutes les fois que la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens, les quatre grandeurs ſont arithmétiquement proportionnelles.* Quatre grandeurs quelconques peuvent être exprimées par celles-ci, b, $b \pm d$, c, $c \pm e$ (150); or ſi on a $b+c \pm e=c+b \pm d$, en ſouſtrayant de l'un & l'autre membre de l'équation la quantité

quantité $b+e$, on aura $\pm d=\pm e$, c'est-à-dire que les deux raisons $b . b\pm d$, & $c . c\pm e$, auront la même valeur arithmétique, & partant $b . b\pm d : c . c\pm e$.

* 155. On peut donc, sans détruire une proportion arithmétique, faire tous les changemens dont nous avons parlé dans le n°. 130. au sujet des proportions géométriques ; mais non ceux dont il s'agit dans les n°. suivans.

* 156. *Dans toute proportion arithmétique chaque extrême est égal à la somme des moyens moins l'autre extrême, & chaque moyen à la somme des extrêmes moins l'autre moyen*; car cela se trouve dans la formule $b . b+d : c . c+d$, ou $b . b-d : c . c-d$, *& partant étant connus trois termes quelconques dans une proportion arithmétique, on connoît le quatrième.*

Propriétés des progressions arithmétiques.

* 157. *Toute progression arithmétique peut se réduire* à la formule $\div b . b+d . b+2d . b+3d . b+4d . b+5d . b+6d$, &c. lorsqu'elle est croissante ; à celle-ci $\div b . b-d . b-2d . b-3d . b-4d . b-5d . b-6d$. &c. lorsqu'elle est décroissante, & *dans tous les cas à la formule générale* $\div b . b\pm d . b\pm 2d . b\pm 3d . b\pm 4d . b\pm 5d . b\pm 6d$. *&c.* Car toute progression arithmétique est une suite de termes qui pris consécutivement ont la même différence (107) ; or c'est ce qui se trouve dans la formule, puisque chaque terme soustrait du suivant dans la proportion croissante, & du précédent dans la décroissante donne la différence $\pm d$. Cette formule forme donc une progression arithmétique ; & d'ailleurs les raisons qui la composent pouvant exprimer toute raison arithméti-

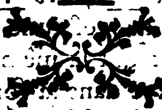
que (150), la formule entière peut exprimer toute progression arithmétique.

* 158. *Dans toute progression arithmétique la somme des extrêmes est égale à la somme des termes qui en sont également éloignés, ou au double du moyen proportionnel si le nombre des termes est impair.* Cela paroît évidemment dans la formule.

* 159. *Dans toute progression arithmétique chaque terme*, le cinquiéme par exemple $b+4d$, *est égal au premier* b *plus au produit de la différence* d *régnante dans la progression par le nombre* 4 *des termes précédens.* Voyez la formule.

* 160. *Enfin dans toute progression arithmétique la somme des termes est égale au produit du nombre des termes par la moitié de la somme des extrêmes ; ou, ce qui revient au même, (158) par le moyen proportionnel, si le nombre des termes est impair.*

Dans la formule précédente la somme des extrêmes est $2b+6d$, la moitié de cette somme ou le moyen proportionnel est $b+3d$, le nombre des termes de la progression est 7; or $b+3d$ étant multiplié par 7, donne $7b+21d$, à quoi se réduit aussi la formule, si l'on ajoute ensemble les b & les d qu'elle contient.



LEÇON SIXIÈME.

DES ÉQUATIONS.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

161. PLUSIEURS quantités jointes par le signe = forment une *équation*. Les quantités qui précédent le signe en sont *le premier membre*, celles qui le suivent sont le *second membre*.

162. L'art de résoudre des problêmes par le moyen des équations, s'appelle *analise*. Il consiste à connoître la valeur des grandeurs inconnues par le moyen de leurs rapports connus avec des grandeurs connues. Un exemple éclaircira tout ceci. On demande quel est le nombre dont le produit par 12 soit 180. Pour trouver ce nombre inconnu, que j'appelle en attendant x, j'observe que par l'énoncé du problême le nombre x multiplié par 12 vaut 180 : j'exprime le rapport connu de x avec les grandeurs connues 12 & 180 par cette équation $12x = 180$; je vois ensuite que quel que soit ce nombre x, si je divise les deux membres de cette équation par 12, ils demeureront encore égaux (6). Cette division donne la seconde équation $x = \frac{180}{12}$, ou $x = 15$, & le problême est résolu.

163. Les problêmes sont ordinairement plus compliqués. La plûpart contiennent plusieurs inconnues ; ceux là ne peuvent se résoudre que par le moyen de plusieurs équations ; *& le problême est enfin résolu lorsqu'on est parvenu à laisser successivement toutes les incon-*

nues seules dans un membre de l'équation, tandis que l'autre n'est composé que de quantités connues.

164. Les grandeurs connues dont le rapport avec les inconnues sert à connoître les inconnues, s'appellent les *données du problême*, & leurs rapports connus avec les inconnues sont appellés les *conditions du problême*, qu'on exprime par des équations. On désigne toujours les données du problême par les premieres lettres *a*, *b*, *c*, *d*, &c. de l'alphabet; ce qui sert à les distinguer d'un coup d'œil des inconnues, qu'on exprime par les dernieres *u*, *x*, *y*, *z*.

165. On dit qu'une équation est du premier, second, troisiéme, &c. degré, selon que l'inconnue est élevée à sa premiere, seconde, troisiéme, &c. puissance. Nous ne parlerons que des équations du premier & du second degré, & très-succintement de ces dernieres.

166. Il y a deux parties dans l'analise : la premiere & la plus délicate est l'art de tirer des conditions du problême toutes les équations nécessaires pour le résoudre. Cette partie n'a pas des régles, il faut les suppléer par le génie, la sagacité, la méditation de l'énoncé du problême & l'habitude du calcul; la seconde partie est l'art de faire subir aux équations qu'on a une fois trouvées, tous les changemens nécessaires pour parvenir à une équation finale. Cette partie a des régles sures. Nous allons donner celles qui sont nécessaires pour la solution des équations du premier & du second degré.



Des différentes opérations qu'on fait sur les équations du premier & du second degré.

167. Ces opérations sont la transposition, la multiplication, la division, la substitution & l'extraction des racines.

DE LA TRANSPOSITION.

168. Soient les équations $x+b=a$, & $x-b=c$; si l'on soustrait b des deux membres de la premiere, & si on l'ajoute à ceux de la seconde, elles deviennent, toute réduction faite, $x=a-b$, & $x=c+b$; d'où il suit *qu'on ne détruit pas une équation en faisant passer des termes d'un membre à l'autre, après en avoir changé les signes.*

169. L'équation $b-x=a$ peut donc devenir d'abord (168) $b=a+x$, ensuite $x=b-a$. En comparant cette équation avec la premiere, on voit que *pour rendre positif un terme négatif, & le laisser en même tems seul dans un membre d'une équation, il faut faire passer dans l'autre membre tous les termes qui l'accompagnent, & ne changer les signes que des termes de l'autre membre.*

170. La transposition sert donc comme l'on voit à laisser l'inconnue seule dans un membre d'une équation.

DE LA MULTIPLICATION.

171. Soit l'équation $\frac{x}{c}+\frac{b}{d}=\frac{a}{e}-f$; si l'on multiplie chaque membre par le produit cde des dénominateurs des fractions qu'elle contient (ce qui ne détruit pas l'équation), elle devient, toute réduction faite, de $x+bce=acd-cdef$. En comparant cette derniere

équation avec la premiere, on voit que *pour faire évanouir les fractions qui se trouvent dans une équation, il faut multiplier chaque membre par le produit des dénominateurs de ces fractions; mais pour s'épargner la peine de la réduction, il faut écrire à la place de chaque fraction, le produit de son numérateur par le produit des dénominateurs des autres fractions.*

DE LA DIVISION.

172. Soit l'équation $cx+b=a$. Si l'on divise l'un & l'autre membre par c, elle devient $x+\frac{b}{c}=\frac{a}{c}$; d'où il suit *que pour dégager l'inconnue des quantités qui la multiplient dans une équation, il faut en diviser les deux membres par ces quantités; après quoi l'on peut connoître aisément par la transposition la valeur de l'inconnue.* Dans ce cas-ci on trouve $x=\frac{a-b}{c}$. De même l'équation $bcx+dx-x=a$, devient $x=\frac{a}{bc+d-1}$; car $bcx+dx-x=\overline{bc+d-1}\times x$.

173. *Si la même lettre se trouve dans tous les termes d'une équation, il faut en diviser les deux membres par cette lettre, ce qui rend l'expression plus simple*; ainsi l'équation $ax+ab-ac=a$ se réduit à celle-ci, $x+b-c=1$.

DE LA SUBSTITUTION.

174. Soient les deux équations $x-z=a$, $x+z=b$; si l'on prend de la premiere équation la valeur de x par la transposition (168), on aura $x=a+z$; & si l'on substitue cette valeur à x dans la seconde équation, elle deviendra, réduction faite, $a+2z=b$, dans laquelle il n'y a plus qu'une inconnue. On voit par cet exemple que *la substitution sert à faire évanouir une inconnue dans une équation, ou même à en faire évanouir successivement plusieurs*, ce qui est nécessaire pour trouver la

valeur de celle qui reste, puisque sans cela le second membre d'une équation, dont l'inconnue formeroit seule le premier, ne pourroit pas être tout composé de quantités connues.

DE L'EXTRACTION DES RACINES.

175. Soit l'équation $xx=a^2$ du second degré; il est clair qu'en extrayant la racine quarrée de chaque membre, elle deviendra $x=\pm a$ (je dis $\pm a$, puisque tout monome positif a deux racines quarrées (67), l'une positive, l'autre négative); celle-ci $x^2=a+b$ deviendra $x=\pm\sqrt{a+b}$, & celle-ci $x^2-2ax+a^2=b$ deviendra $x-a=\pm\sqrt{b}$, ou (168) $x=a\pm\sqrt{b}$. Par une opération toute contraire l'équation $\sqrt{x}=a$ deviendra $x=a^2$.

* 176. *Mais si l'équation contient, outre le quarré de l'inconnue, un terme qui contienne la premiere puissance de l'inconnue, & si le membre où se trouvent ces deux termes n'est pas un quarré parfait*, comme dans l'équation $x^2+2ax-c=b$, *il faut* 1°. *laisser seuls dans un membre les termes où se trouve l'inconnue*, ce qui donnera $x^2+2ax=b+c$: 2°. *faire de ce membre un quarré parfait; ce qui se fera nécessairement* (64) *en ajoutant à ce membre le quarré* a^2 *de la moitié de la grandeur* $2a$ *qui multiplie la premiere puissance de l'inconnue* : 3°. *ajouter ce même quarré au second membre, afin de conserver* (6) *l'équation*, ce qui donnera la nouvelle équation $x^2+2ax+a^2=b+c+a^2$, d'où on tirera (175) $x+a=\pm\sqrt{b+c+a^2}$, ou (168) $x=\pm\sqrt{b+c+a^2}-a$.

Par la même méthode l'équation $x^2-cx=a$ deviendra $x^2-cx+\frac{cc}{4}=a+\frac{cc}{4}$, ensuite (175) $x-\frac{c}{2}=\pm\sqrt{a+\frac{cc}{4}}$, & enfin (168) $x=\frac{c}{2}\pm\sqrt{a+\frac{cc}{4}}$. L'équation $x^2+x=a$ deviendra $x^2+x+\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4}$, ensuite $x+\frac{1}{2}=\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}$, ou (168) $x=\pm\sqrt{a+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$.

De la résolution des problêmes par l'analise.

PROBLEME. I.

177\. ETANT *données la somme* a *& la différence* d *de deux grandeurs* x *&* y, *connoître chacune de ces grandeurs.*

SOLUTION. Soit x plus grand que y, les conditions du problême sont,

$$x+y=a$$
$$x-y=d.$$

On trouve dans la premiere équation (168) $x=a-y$, & dans la seconde $x=d+y$; & partant $d+y=a-y$ ou (168) $2y=a-d$, ou (172) $y=\frac{a-d}{2}$.

Je substitue cette valeur à y dans la premiere équation, qui devient $x+\frac{a-d}{2}=a$, ou (83) en faisant du premier membre une fraction seule, $\frac{2x+a-d}{2}=a$, ou (171) $2x+a-d=2a$, ou (168) $2x=2a-a+d$, ou enfin $x=\frac{a+d}{2}$.

Les deux solutions $x=\frac{a+d}{2}$ & $y=\frac{a-d}{2}$ donnent donc cette régle générale. *De deux quantités inégales, la plus grande est égale à la moitié de leur somme plus la moitié de leur différence, & la plus petite à la moitié de leur somme moins la moitié de leur différence*; car c'est ce que signifient les équations finales $x=\frac{a+d}{2}$, & $y=\frac{a-d}{2}$.

On peut tirer de cette ſolution générale telle ſolution particuliere qu'on voudra. Soit, par exemple, $a = 100$ ans, ſomme des âges de deux perſonnes, $d = 20$ ans, différence de ces âges. Soit x le plus grand âge ; en ſubſtituant aux lettres leurs valeurs dans les équations finales précédentes, on trouvera $x = 60$ ans, $y = 40$ ans.

178. On auroit pu réſoudre ce problême par une ſeule équation ; car en appellant x la plus grande des quantités propoſées, la plus petite ſera $x - d$, & la condition du problême ſera $x + x - d = a$, ou $2x - d = a$, ou (168) $2x = a + d$, ou enfin (172) $x = \frac{a+d}{2}$. x étant connu, $x - d$ l'eſt auſſi néceſſairement. *C'eſt une attention qu'il faut avoir d'employer dans la réſolution d'un problême auſſi peu d'inconnues qu'on le peut. Il faut alors moins d'équations pour le réſoudre, & la ſolution eſt plus facile.*

PROBLEME II.

179. *Si Pierre, outre les louis qu'il a, en avoit encore le tiers, plus le quart, plus 5, il en auroit* 100 ; *combien de louis a-t-il ?*

SOLUTION. Soit x le nombre de louis cherché, la condition du problême eſt $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + 5 = 100$, ou (168) $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 100 - 5 = 95$, ou (171) $12x + 4x + 3x = 95 \times 12 = 1140$, ou $19x = 1140$, ou (172) $x = \frac{1140}{19} = 60$.

PROBLEME III.

* 180. *Deux mobiles éloignés d'un intervalle connu* a, *commencent tous les deux en même-tems à ſe mouvoir ſur une même ligne avec des viteſſes qui ſont entr'elles comme* 1 *eſt à* 2. *On demande à quel point ils ſe rencontreront,*

soit qu'ils aillent tous les deux du même côté, ou qu'ils aillent l'un vers l'autre.

SOLUTION. 1°. Si les mobiles ont la même direction, celui qui a 1 de vitesse parcourt un certain espace x encore inconnu avant d'être atteint par celui qui a 2 de vitesse, lequel a parcouru alors l'espace $a+x$; & comme les espaces parcourus en des tems égaux sont en raison directe des vitesses des corps qui les parcourent, on a la proportion $1 . 2 :: x . a+x$. On parvient donc à l'équation (126); $2x=a+x$, ou (168) $2x-x=a$, ou $x=a$; c'est-à-dire que l'espace que parcourra le corps qui a 1 de vitesse avant d'être atteint est égal à l'intervalle connu a des deux mobiles.

Si les mobiles viennent l'un vers l'autre, celui qui a 1 de vitesse a parcouru avant d'être atteint l'espace x, l'autre l'espace $a-x$: on a donc la proportion $1 : 2 :: x : a-x$; & par conséquent (126) l'équation $2x=ax$, ou (168) $2x+x=a$, ou $3x=a$, ou (172) $x=\frac{a}{3}$, c'est-à-dire que les mobiles se rencontreront, lorsque celui qui a 1 de vitesse aura parcouru le tiers de l'intervalle connu a des deux mobiles.

PROBLEME IV.

*181. *Connoître la somme S des termes d'une progression géométrique* $\div\!\div a . b . d$, *dont on connoît le premier terme* a, *le second* b, *& le dernier* d, *soit que la progression soit croissante ou décroissante.*

SOLUTION. Une progression étant une suite de raisons égales, dans laquelle chaque terme, excepté le premier & le dernier, est conséquent d'une raison & antécédent de la suivante, la somme des antécédens est $s-d$, & la somme des conséquens $s-a$; or (136) $s-d : s-a :: a : b$: donc on a l'équation $bs-bd = as-a^2$, d'où l'on tire pour la progression crois-

sante, $bs - as = bd - a^2$, & pour la progression décroissante, $as - bs = a^2 - bd$ (b dans le premier cas étant plus grand que a, & a l'étant plus que b dans le second); d'où on tire dans le premier cas (172), $s = \frac{bd - a^2}{b - a}$, & dans le second, $s = \frac{a^2 - bd}{a - b}$.

PROBLEME V.

* 182. *Étant données les pesanteurs spécifiques* a *&* b *de deux matieres qui entrent dans un mixte*, (c'est-à-dire ce que pese par exemple un pouce cube de chacune) *le volume* c *& le poids total* d *du mixte, trouver ce qu'il entre* (de pouces cubes par exemple) *de chacune de ces deux matieres dans le mixte.* Soit ce qu'il entre de la premiere dans le mixte x, & y ce qu'il y entre de la seconde.

SOLUTION. Ce problême contenant deux inconnues, il faut deux équations pour le résoudre. En général *il faut pour la solution d'un problême former autant d'équations qu'il contient d'inconnues.* Pour trouver la premiere équation, j'observe 1°. que ce qu'il entre de chacune de ces deux matieres dans le mixte forme le volume du mixte, c'est-à-dire que $x + y = c$: 2°. que le nombre des pouces cubes de la premiere matiere étant x, & le poids d'un de ces pouces cubes étant a, le poids de tous les pouces cubes de cette matiere qui entrent dans le mixte est ax; & que pour la même raison le poids de tous les pouces cubes de la seconde matiere qui entrent dans le mixte est by; & ces deux poids étant égaux pris ensemble au poids du mixte, on a l'équation $ax + by = d$. La premiere équation devient par la transposition $x = c - y$, la seconde (168 & 172) $x = \frac{d - by}{a}$: donc $c - y =$

$\frac{d-by}{a}$, ou (171) $ac-ay=d-by$, ou (168) $ay-by = ac-d$, ou (172) $y=\frac{ac-d}{a-b}$. En substituant à y dans la premiere condition du problême, sa valeur trouvée, elle devient $x+\frac{ac-d}{a-b}=c$, ou (171) $ax - bx+ac-d=ac-bc$, ou (168) $ax-bx=d-bc$, ou (172) $x=\frac{d-bc}{a-b}$.

PROBLEME VI.

* 183. *On demande quel nombre x de pintes de vin, tel que le prix de la pinte soit a, & quel nombre y de pintes d'un autre vin dont le prix est b par pinte il faut mêler ensemble pour avoir un nombre c de pintes de mêlange dont le prix soit p par pinte.*

SOLUTION. Puisqu'on connoît le nombre c de pintes du mêlange, & le prix p de chacune, on connoît donc le prix total du mêlange que j'appelle d. Cela posé, on trouvera, comme dans le problême précédent, & pour les mêmes raisons, les deux équations

$$x+y=c,$$
$$ax+by=d,$$

& les deux équations finales $y\frac{ac-d}{a-b}$, & $x=\frac{d-bc}{a-b}$; d'où on tirera telle solution particuliere qu'on voudra. Par exemple, faisant $a=12$ sols, $b=8$ sols, $c=100$ pintes, $p=9$ sols, d vaudra 900 sols; & en substituant aux lettres leurs valeurs dans les deux équations finales, on trouvera $y=\frac{12\times100-900}{12-8}=75$, & $x=\frac{900-8\times100}{12-8}=25$, c'est-à-dire qu'il faut mêler 75

pintes de vin à 8 sols avec 25 pintes de vin à 12 sols la pinte, pour avoir 100 pintes de mêlange à 9 sols la pinte. On appelle de pareilles solutions *régle d'alliage*.

PROBLEME VII.

* 184. *Un Marchand achete trois chevaux. Le prix du premier avec la moitié du prix des autres est* a, *le prix du second avec le tiers du prix des deux autres est* b, *le prix du troisiéme avec la moitié du prix des deux autres est* c; *on demande les prix* x, y, z *de ces trois chevaux.*

SOLUTION. Ce problême contenant trois inconnues, ne peut être résolu que par trois équations que l'énoncé du problême fournit aisément. Ces équations sont A, B, C.

$$A \ldots\ldots\ x + \frac{y+z}{2} = a$$

$$B \ldots\ldots\ y + \frac{x+z}{3} = b$$

$$C \ldots\ldots\ z + \frac{x+y}{2} = c$$

En les dégageant de leurs fractions (171), on les réduit aux équations D, E, F.

$$D \ldots\ldots\ 2x + y + z = 2a$$
$$E \ldots\ldots\ 3y + x + z = 3b$$
$$F \ldots\ldots\ 2z + x + y = 2c.$$

Maintenant, si l'on veut connoître la valeur de x, il faut prendre dans l'équation D la valeur de y, en cette sorte (168), $y = 2a - 2x - z$, & substituer à y cette valeur dans les équations E, F qui deviendront, toute réduction faite, G & H.

$$G \ldots\ldots\ 6a - 5x - 2z = 3b$$
$$H \ldots\ldots\ z + 2a - x = 2c$$

On a réduit ainsi les équations E, F à n'avoir plus

chacune que deux inconnues ; & l'on peut opérer sur ces deux dernieres équations comme sur celles des problêmes V ou VI. Pour cela il faut prendre dans l'équation G, $z = \frac{6a - 5x - 3b}{2}$ (168, 169 & 172), & dans l'équation H, $z = 2c - 2a + x$; d'où suit l'équation I ;

$$\text{I} \ldots \quad \frac{6a - 5x - 3b}{2} = 2c - 2a + x,$$

qui ne contient qu'une inconnue ; & cette équation devient successivement par les régles précédentes (171) $6a - 5x - 3b = 4c - 4a + 2x$, ensuite (168) $6a - 3b - 4c + 4a = 5x + 2x$, ou (51) $10a - 3b - 4c = 7x$, enfin (172) $x = \frac{10a - 3b - 4c}{7}$.

Pour connoître la valeur de z je substitue à x sa valeur trouvée dans l'équation H, qui devient l'équation K,

$$\text{K} \ldots \quad z + 2a - \frac{10a + 3b + 4c}{7} = 2c$$

ou $7z + 14a - 10a + 3b + 4c = 14c$, ou (168) $7z = 14c - 14a + 10a - 3b - 4c$, ou (52 & 172) $z = \frac{10c - 4a - 3b}{7}$.

Enfin x & z étant connus, y le sera aussi ; car on a dans l'équation B, $y = b - \frac{x + z}{3}$; on peut des deux équations finales $x = \frac{10a - 3b - 4c}{7}$, & $z = \frac{10c - 4a - 3b}{7}$, tirer telle solution particuliere qu'on voudra. Par exemple faisant $a = 25$ pistoles, $b = 26$ pist. $c = 29$ pist. on trouvera $x = \frac{10 \times 25 - 3 \times 26 - 4 \times 29}{7} = 8$

pistoles, & $z = \frac{10 \times 29 - 4 \times 25 - 3 \times 26}{7} = 16$ pistoles; & prenant le tiers de $8 + 16$, qui est 8, & le soustrayant de 26 pistoles, le reste 18 pistoles sera la valeur de y.

PROBLEME VIII.

* 185. Trouver un nombre x tel qu'ôtant son quadruple de son quarré, il reste 21. On a l'équation $xx - 4x = 21$, qui est, comme l'on voit, du second degré. En faisant du premier membre de cette équation un quarré parfait (176), elle devient $xx - 4x + 4 = 21 + 4$, & en extrayant les racines $x - 2 = \pm \sqrt{25}$, ou (168) $x = \pm \sqrt{25} + 2$, c'est-à-dire 7 si l'on prend $+ \sqrt{25}$, ou $- 3$ si l'on prend $- \sqrt{25}$. En effet, soit que l'on soustraye 28, quadruple de 7, de 49 quarré de 7, ou que l'on soustraye -12, quadruple de -3, de 9, quarré de -3, on trouve également 21.

FIN DU CALCUL.



SECONDE PARTIE.

DE LA GÉOMÉTRIE.

186. NOUS divisons en neuf leçons ce que nous devons dire de la Géométrie. Les voici par ordre : 1°. des différentes positions respectives de deux lignes droites : 2°. des triangles : 3°. des proprietés du cercle : 4°. des poligones : 5°. des lignes proportionnelles : 6°. des plans : 7°. des solides : 8°. de la trigonométrie rectiligne : 9°. des sections coniques.



LEÇON PREMIERE.

Des différentes positions respectives de deux lignes droites.

NOTIONS PRELIMINAIRES.

187. LA Géométrie a pour objet les trois dimensions de l'étendue ; la longueur, la largeur & la profondeur, & elle en démontre les propriétés.

188. Le *point* eſt une quantité que les Géometres conſiderent comme ſans étendue, ou dont ils regardent les trois dimenſions comme infiniment petites.

189. La *ligne* eſt une étendue en long, qu'on conſidere comme ſans largeur. On peut la regarder comme la trace d'un point qui ſe meut. La ligne eſt *droite* ou *courbe*, ſelon que les points qui la forment ſont dans la même, ou dans différentes directions.

190. La *ſurface* eſt une étendue en long & en large qu'on regarde comme ſans profondeur : on peut la regarder comme la trace d'une ligne qui ſe meut, de façon que tous ſes points décrivent des lignes différentes.

191. Le *ſolide* eſt une grandeur qui a les trois dimenſions de l'étendue. On peut le regarder comme la trace d'une ſurface qui ſe meut, de façon que toutes les lignes qui la compoſent décrivent des ſurfaces différentes.

AXIOMES.

192. *La ligne droite eſt la plus courte qu'on puiſſe tirer d'un point à un autre, & par conſéquent elle meſure exactement la diſtance de deux points.*

193. *On ne peut tirer qu'une ligne droite d'un point à un autre, & par conſéquent la poſition de deux points détermine une ligne droite.*

194. *Deux lignes droites ne peuvent avoir qu'un point commun*, puiſque ſi elles en avoient deux, la poſition de deux points ne détermineroit pas la poſition d'une ligne droite; *& par conſéquent deux droites ne peuvent ſe couper qu'en un ſeul point.*

195. *Toute ligne courbe eſt un compoſé de lignes droites infiniment petites, qui ont des directions différentes*; car deux points contigus forment une ligne droite infiniment petite, & toute courbe eſt compoſée de points contigus.

Des lignes perpendiculaires & obliques.

DÉFINITIONS.

196. On appelle *angle* l'écart de deux lignes qui se rencontrent. Il est *rectiligne*, *curviligne* ou *mixtiligne*, selon qu'il est formé par deux droites ou par deux courbes, ou par une droite & une courbe. Nous ne parlerons que de l'angle rectiligne. Les droites C A B A en forment un. Leur point de concours A est la *pointe* de l'angle ; elles en sont les *côtés*. On exprime cet angle ou tout autre, par trois lettres B A C, dont celle du milieu marque toujours la pointe, & quelquefois par cette lettre seule. Fig. 11

197. Une ligne D E est *perpendiculaire* à une autre lorsqu'elle tombe sur elle, sans pancher d'un côté ni d'autre, ou, ce qui revient au même, lorsqu'elle fait avec cette autre ligne deux angles D E A, D E B égaux. Et une ligne C E est *oblique* à une autre A B, lorsqu'elle panche plus d'un côté de cette ligne que de l'autre, ou, ce qui revient au même, lorsqu'elle fait avec cette autre des angles C E A, C E B inégaux. Fig. 12

198. On appelle *angle droit* un des angles égaux formés par une ligne D E perpendiculaire à une autre A B ; *angle aigu*, le plus petit C E B des angles que forme une ligne C E oblique à une autre A B ; & *angle obtus*, le plus grand C E A de ces deux angles. L'un C E B des angles que fait une ligne C E oblique à une autre ligne A B, est appellé *supplément* de l'autre, parce qu'il vaut tout ce qui manque à l'autre C E A, pour être égal à deux angles droits D E A, D E B.

THÉOREMES.

199. *La grandeur d'un angle ne dépend pas de la lon-*
Fig. 1. *gueur de ses côtés*, puisque les lignes C A, B A n'en seront pas plus écartées, quoiqu'on les prolonge en D & en O; ainsi l'angle D A O = C A B.

200. *Une droite quelconque en tombant sur une autre fait avec elle des angles équivalens à deux droits*; car elle
Fig. 2. fait deux angles droits D E A, D E B, si elle est perpendiculaire comme DE (198); ou deux angles C E A, C E B qui tiennent la place de deux droits, si elle est oblique, comme C E.

201. *On ne peut mener dans un même plan qu'une perpendiculaire sur un même point d'une ligne donnée* (197), puisqu'il n'y a qu'une position dans laquelle une ligne fait avec une autre, & sur le même point, deux angles égaux en demeurant dans le même plan.

202. *Tous les angles droits sont égaux*; car si l'on transporte la ligne A B, (*fig.* 2.) sur la ligne B B (*fig.* 3.), le point E sur le point E, les perpendiculaires E D, E D se confondront, puisque si elles ne se confondoient pas, deux perpendiculaires différentes seroient élevées sur le même point E de la ligne B B; ce qui est impossible (201); & par conséquent les angles D E A, D E B (*fig.* 2.) sont égaux aux angles D E B, D E B, (*fig.* 3.); *mais il y a une infinité d'angles aigus ou obtus tous inégaux*, ce qui est évident.

203. *Les angles* C E B, A E G *opposés par la pointe, formés par l'intersection de deux droites* A B, C G, *sont égaux*; car les angles C E B, B E G valent deux angles droits, de même que les deux angles B E G, A E G (200): donc si de ces deux quantités égales on ôte l'angle commun B E G, les restes, qui sont les angles A E G, C E B, seront égaux.

204. *Une ligne* D E *perpendiculaire à une autre* A B,

& qui la coupe, fait avec elle deux angles droits en dessous comme en dessus; car les angles Q E A, Q E B sont égaux (203) à leurs opposés par la pointe D E B, D E A; & par conséquent ils sont droits comme eux (202).

205. *Si une ligne* D E *est perpendiculaire à une autre* A B, *cette autre est perpendiculaire à la premiere.* Les angles B E D, B E Q sont droits (204) : donc B E est perpendiculaire à D Q.

206. *Tant de droites qu'on voudra* D E, C E, *qui vont aboutir au même point* E *d'une droite* A B, *ou qui la coupent, font avec elle des angles qui valent deux angles droits dans le premier cas, & quatre dans le second*; car elles font des angles, qui dans le premier cas occupent la place de deux angles droits (200), & de quatre dans le second cas (204).

207. *Une droite* D E *perpendiculaire à une autre* B B, *a tous ses points également éloignés de deux mêmes points de la ligne* B B *sur laquelle elle tombe*; ainsi supposant que le point E est également éloigné des points C, C, le point D le sera aussi; car si l'espace D E C se replie sur la ligne D E, les angles en E étant égaux (197), la ligne E C se confondra avec la ligne E C; & à cause de l'égalité de ces deux lignes, le point C sera sur le point C; & par conséquent les lignes D C, D C se couvriront exactement : donc elles sont égales. Fig. 3.

208. *Réciproquement une ligne* D E *qui a tous ses points également éloignés de deux mêmes points* C, C *de la ligne* B B *sur laquelle elle tombe, est perpendiculaire à cette ligne*; car il n'y a qu'une position dans laquelle une droite, qui part du point E, ait tous ses points également éloignés des deux mêmes points C, C de la ligne B B; or une perpendiculaire à la ligne B B qui passe par E, a tous ses points également éloignés des points C, C (207) : donc une ligne qui passera par

les mêmes points sera perpendiculaire à la ligne BB.

209. *Il suffit de sçavoir qu'une ligne* DE *a deux points* D, I *également éloignés de deux mêmes points* C, C *de la ligne sur laquelle elle tombe, pour être assuré qu'elle est perpendiculaire à cette ligne*; car une perpendiculaire à la ligne BB, qui auroit tous ses points également éloignés des points C, C, passeroit nécessairement par les points D, I (207): donc elle se confondroit avec la ligne DE (194): donc la ligne DE est perpendiculaire à la ligne BB.

210. *De toutes les droites* DE, DC, DB *qu'on peut tirer d'un même point* D *sur une même droite* BB, 1°. *la perpendiculaire est la plus courte*: 2°. *les plus obliques sont les plus longues.* Soit prolongée la perpendiculaire DE en O, ensorte que DE = EO; & tirez les lignes CO, BO, la ligne CE étant perpendiculaire à la ligne DO, les lignes DC, CO seront égales (207); & la courbe DCO étant plus longue que la droite DO (192), la moitié DC de la premiere est plus longue que la moitié DE de la seconde: donc toute oblique DC est plus longue que la perpendiculaire DE.

La courbe DBO est plus longue que la courbe DCO; donc la moitié DB de la premiere est plus longue que la moitié DC de la seconde: donc les plus obliques sont les plus longues.

211. *La perpendiculaire mesure exactement la distance d'un point à une droite*, puisqu'elle est la plus courte ligne qu'on puisse y mener de ce point (210).

212. *On ne peut mener qu'une perpendiculaire d'un point à une ligne donnée*, puisqu'elle est la plus courte de toutes celles qu'on peut y mener de ce point.

PROBLEMES.

213. *Pour élever une perpendiculaire* ED *sur un point*

quelconque E *d'une ligne donnée* AB, prenez avec le compas deux points A, B, également éloignés de E, fixez successivement sur ces deux points la pointe du compas, & en gardant la même ouverture, faites décrire à l'autre pointe des courbes qui se croisent en D; du point d'intersection D, tirez une ligne en E, elle sera la perpendiculaire demandée (209); car elle aura deux points E, D, dont chacun sera aussi éloigné de A que de B, puisque par la construction, la même ouverture de compas qui mesure la distance A E, mesure aussi la distance B E, & que la même qui mesure la distance A D, mesure pareillement la distance D B. Fig. 2.

Pour élever une perpendiculaire sur l'extrémité E *d'une ligne donnée* A E, continuez cette ligne, & opérez comme ci-devant (213).

214. *Pour mener sur une ligne donnée* A B *une perpendiculaire* D E *d'un point donné* D *hors de cette ligne*, fixez la pointe du compas en D & marquez avec l'autre pointe les points A, B, également éloignés de D; ensuite fixant successivement sur ces deux points la pointe du compas, décrivez avec l'autre pointe des courbes qui se croisent en Q; joignez les points Q, D par une droite, ce sera la perpendiculaire cherchée (209), puisque par la construction les points D, Q sont également éloignés des points A, B de la ligne A B.

215. *Pour couper en deux également une ligne donnée* A B *par une perpendiculaire* D Q, fixez successivement sur ses extrémités A, B, une pointe de compas, décrivez avec l'autre, en gardant toujours la même ouverture, des courbes qui se croisent en D & en Q; menez D Q, ce sera la perpendiculaire cherchée; car ayant les points D, Q également éloignés des points A, B par la construction, le point E le sera aussi (207); & par conséquent il sera le milieu de la ligne A B.

* 216. *Pour faire sur un point quelconque* E *d'une ligne*

donnée AB (*fig.* 2.) un angle CEB égal à un angle donné CAB (*fig.* 1.), je fixe la pointe du compas en A, & faisant rouler l'autre pointe, je marque deux points I, K également éloignés de A; je fixe ensuite la pointe du compas en E (*fig.* 2.), & je décris la courbe indéfinie POR; je prens encore avec le compas l'intervalle IK (*fig.* 1.), & je le porte sur PO (*fig.* 2.); par les points O, E je mene CE, qui fait l'angle CEB égal à l'angle donné CAB; car si l'on transporte l'angle CAB sur l'angle CEB, A sur E, AB sur EB, K tombera sur P, la courbe KI s'appliquera à la courbe POR, & par la construction le point I de la courbe KI sera sur le point O de la courbe PR: donc les lignes CA, CE ayant deux points communs, se confondront (194).

DES LIGNES PARALLELES.

DEFINITIONS.

Fig. 4. 217. UNE ligne droite KE, dont tous les points sont également éloignés d'une autre ligne AF, est *parallele* à cette ligne.

218. Parmi les angles que fait la sécante LG de deux paralleles KE, AF avec ces deux lignes, ceux qui sont placés du même côté de la sécante, tous les deux en dessus, ou tous les deux en dessous des paralleles, sont appellés *correspondans*, comme D & O, E & H, C & B, R & I. Ceux qui sont placés tous les deux entre les paralleles, l'un d'un côté de la sécante, l'autre de l'autre, sont appellés *alternes internes*, comme H & C, I & D. Ceux qui étant placés l'un d'un côté de la sécante, l'autre de l'autre, sont tous les deux hors des paralleles, sont appellés *alternes externes*; comme O & R, B & E.

THÉOREMES.

219. *Deux lignes paralleles à une troisiéme sont paralleles entr'elles.*

220. *Deux paralleles prolongées à l'infini ne se rencontreroient jamais* ; ce sont là des conséquences évidentes de la définition (217) des paralleles.

221. *Il suffit de sçavoir qu'une ligne* K E *a deux points*, O, D *également éloignés d'une autre ligne* A F, *pour être assuré que ces lignes sont paralleles* ; car une ligne qui passeroit par l'un de ces points O, & qui seroit par tout également éloignée de l'autre ligne, passeroit néçessairement par le point D : donc elle se confondroit avec la ligne K E (194) ; donc la ligne K E est parallele à la ligne A F. Fig. 51

222. *Toutes les lignes* O R, D I, *tirées de differens points* O, D *d'une droite* K E *perpendiculairement à sa parallele* A F *sont égales. Et réciproquement, si deux lignes* O R, D I, *tirées de differens points* O, D *d'une droite* K E *perpendiculairement à une autre droite* A F *sont égales, ces deux droites sont paralleles* ; car la perpendiculaire est la mesure exacte de la distance d'un point à une droite (211) : donc si une ligne K E a tous ses points O, D également éloignés d'une autre ligne A E ; ou, ce qui revient au même (217), si elle lui est parallele, les perpendiculaires O R, D I, tirées des points quelconques O, D de l'une sur l'autre, seront égales ; & réciproquement, si deux de ces perpendiculaires O R, D I sont égales, la ligne K E a deux points O, D également éloignés de la ligne A F ; & par conséquent (221) elle lui est parallele.

223. *Deux droites* O R, D I *perpendiculaires à une troisiéme* A F, *sont paralleles entr'elles* ; car si elles concouroient, ces deux lignes partant d'un même point seroient perpendiculaires à la même ligne, ce qui est impossible (212).

224. *Une droite* D I *perpendiculaire à une ligne* A F *est aussi perpendiculaire à sa parallele* K E ; ensorte que si du point I on mene une perpendiculaire à la ligne K E, ce sera la ligne même I D ; car soit I O cette perpendiculaire, elle sera plus courte que I D ; & si du point O on mene la perpendiculaire O R à la ligne A F, elle sera plus courte que O I (210), & par conséquent plus courte que I D : donc les lignes O R, D I, tirées de différens points d'une droite K E perpendiculairement à sa parallele A F, ne seroient pas égales, ce qui est impossible (222).

225. *Parmi les angles que fait la sécante* L G *de deux paralleles* K E, A F, 1°. *les angles alternes internes* D G I, O I R *sont égaux*. Soient les perpendiculaires D I, O R à la ligne A F. 1°. Elles sont égales (222), 2°. paralleles (223), 3°. perpendiculaires à K E (224) : donc les lignes O D, R I, qui sont aussi des perpendiculaires entre paralleles (205), sont égales (222). Cela posé, qu'on conçoive que l'espace O D I se déplace, de façon que la pointe I aille s'appliquer à la pointe O de l'espace O R I, la ligne I D à son égale O R, le point D sera sur le point R ; & à cause des angles droits D, R, la ligne D O se confondra avec son égale R I, la pointe O de l'espace O I D sera sur le point I : donc la ligne O I de l'espace O D I se confondra avec la ligne I O de l'espace O R I : donc les angles D O I, O I R auront leurs côtés confondus ; & par conséquent ils sont égaux.

Fig. 4. Les angles alternes internes aigus I, D, étant égaux, les alternes obtus H, C, qui sont les supplémens des premiers, sont aussi égaux.

226. 2°. *Les angles alternes externes* O, R *ou* B, E *sont égaux* ; car les angles O, R sont opposés par la pointe aux angles alternes internes aigus I, D, & les angles B, E aux alternes internes obtus H, C ; or

ceux-ci étant égaux (225), ceux-là le seront aussi (203).

227. 3°. *Les angles correspondans sont égaux*; car l'angle I est égal à son alterne D (225); il est aussi égal à son opposé par la pointe O (203) : donc les correspondans O, D sont égaux : leurs supplémens B, C aussi correspondans sont donc égaux; enfin les angles I, R correspondans, sont opposés par la pointe aux correspondans égaux O, D, & les angles H, E aux angles égaux B, C : donc chacun de ces angles est égal à son correspondant.

228. 4°. *Deux angles dont l'un soit aigu & l'autre obtus pris à volonté*, par exemple les angles O, C, *sont supplément l'un de l'autre*; car l'angle O est égal à son correspondant D (225); & celui-ci est supplément de l'angle C. La démonstration est la même pour deux autres angles quelconques, dont l'un soit aigu & l'autre obtus, si l'un est fait par une parallele, l'autre par l'autre.

229. *Il suffit de sçavoir que la sécante* L G *de deux lignes* K E, A F *fait les angles alternes* I, D *égaux, pour être assuré que ces lignes sont paralleles. On en seroit également assuré, si deux angles correspondans quelconques* B, C *(fig. 4.) étoient égaux.* Car si l'on commence par supposer que la ligne K E est parallele à la ligne A F, les angles alternes I, D seront nécessairement égaux (225); or ces angles ne peuvent demeurer égaux si la ligne K E ne demeure dans la même position, tandis qu'elle coupera L G au même point : donc si les angles I, D sont égaux, les lignes K E, A F sont paralleles. Pour la même raison si les angles correspondans B, C sont égaux, les lignes K E, A F sont paralleles.

PROBLEME.

230. *Pour mener une parallele* K E *à une ligne donnée* Fig. 5.

AF *par un point donné* O ; de ce point j'abbaisse à la ligne donnée la perpendiculaire OR ; d'un autre point quelconque I de la ligne donnée, j'éleve la perpendiculaire ID, que je fais égale à OR ; & par les points OD je fais passer une droite KE, qui est la parallele cherchée, puisqu'à cause des perpendiculaires égales OR, DI, la ligne KE a deux points O, D également éloignés de la ligne AF.



LEÇON SECONDE.

DES TRIANGLES.

DEFINITIONS.

231. TROIS lignes qui se rencontrent forment un *triangle*, qu'on appelle *isocelle*, si deux de ses côtés sont égaux, comme DCC (*fig.* 3.) ; *équilatéral*, s'il a les trois côtés égaux, comme AEB (*fig.* 27.) ; *scalene*, si les trois côtés sont inégaux, comme HGI (*fig.* 6.) ; *rectangle*, si un des trois angles est droit, comme DEB (*fig.* 3.) ; *obtusangle*, si un de ses angles est obtus, comme DCB (*fig.* 3.) ; *acutangle*, si tous ses angles sont aigus, comme HGI (*fig.* 6.). Le côté opposé à un angle est appellé la *base* de cet angle. On donne à la base de l'angle droit le nom particulier *d'hypothénuse*.

Fig. 6. On appelle *côtés homologues* dans deux triangles A, B les deux plus petits GH, KL, les deux plus grands HI, LM, & les deux moyens GI, KM ; & *angles homologues*, ceux qui sont opposés à des côtés homologues.

232. Deux triangles ABC, *abc* sont *semblables*, lorsqu'ils ont tous leurs angles homologues égaux. Fig. 91

THEOREMES.

233. *Les trois angles d'un triangle quelconque* A *valent deux angles droits*. Soit tirée par le point G la parallele DE à la ligne HI, les trois angles DGH, HGI, EGI valent deux angles droits (206); or l'angle DGH est égal à son alterne GHI (225), & l'angle EGI est pareillement égal à son alterne GIH: donc les trois angles GHI, HGI, GIH valent deux angles droits; d'où il suit que, Fig. 81

234. 1°. *Un triangle ne peut avoir ni deux angles droits, ni à plus forte raison un droit & un obtus, ou deux obtus.*

235. 2°. *Chaque angle d'un triangle est supplément des deux autres.*

236. 3°. *Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, chacun à chacun, le troisiéme de l'un est égal au troisiéme de l'autre.*

237. 4°. *L'angle* KMO *extérieur à un triangle quelconque* B, c'est-à-dire formé par un côté KM, & par le prolongement de l'autre LM, *est égal à la somme des angles* L, K *intérieurs opposés de ce triangle*; car l'angle KML vaut avec l'extérieur son voisin deux angles droits (200); il vaut pareillement deux angles droits avec la somme des angles L, K (233): donc si de ces deux quantités égales on ôte l'angle commun KML, les restes, qui sont d'un côté la somme des angles L, K, & de l'autre l'extérieur KMO, sont égaux.

* 238. Si d'un angle quelconque D d'un triangle DCC *qui a les deux autres angles aigus, on tire une perpendiculaire sur le côté opposé* CC, *elle tombera au dedans du triangle: elle tombera au contraire en dehors du triangle* DCB, *si l'un* DCB *des deux autres angles* Fig. 3.

est obtus ; car si dans l'un ou l'autre cas la perpendiculaire étoit la ligne D P, le triangle D P C auroit un angle droit D P C, & un angle obtus D C P, ce qui est impossible (234).

Fig. 6. 239. *Deux triangles* A, B *sont égaux en tout* : 1°. *lorsque tous leurs côtés homologues sont égaux chacun à chacun.* Fixez la pointe du compas en G, & de l'intervalle G I = K M décrivez la courbe P Q, fixez ensuite le compas en H, & de l'intervalle H I = L M décrivez la courbe R S ; appliquez le triangle K L M sur le triangle G H I, la ligne K L sur son égale G H, le point K sur le point G, & le point L sur le point H, la ligne K M aboutira à quelque point de la courbe P Q, puisque tous les points de cette courbe sont éloignés de G de l'intervalle K M. Pareillement la ligne L M aboutira à quelque point de la courbe R S ; mais les deux lignes K M, L M aboutissant au même point M, aboutiront au point commun I de ces deux courbes : donc les côtés K M & L M se confondront avec leurs homologues G I, H I : donc tous les angles des triangles A, B se confondront ; & par conséquent ces triangles se trouveront égaux en tout.

240. 2°. *Lorsque deux angles de l'un étant égaux à deux angles de l'autre, chacun à chacun, ils ont chacun un côté* H I, L M *homologue égal ;* car 1°. deux angles dans l'un étant égaux à deux angles dans l'autre, chacun à chacun, le troisiéme de l'un est égal au troisiéme de l'autre (236). 2°. Appliquez le côté L M sur son égal H I, L sur H, M sur I, à cause des angles H, I égaux aux angles L, M, les côtés H G, I G se confondront avec les côtés L K, M K ; & par conséquent les côtés L K, M K aboutiront au point G.

241. 3°. *Lorsqu'ayant chacun deux côtés homologues* H G, G I *&* L K, K M *égaux, l'angle* G *&* K *compris par ces côtés est égal dans chacun.* Appliquez K L sur son

égale G H, K sur G, L sur H, le côté K M se confondra avec son égal G I, à cause des angles égaux G & K. Le point M sera sur I; & par conséquent les côtés L M, H I se confondront.

242. *Une perpendiculaire* D E, *tirée sur la base* C C *d'un triangle isocele* D C C *de la pointe* D *de l'angle opposé, la divise en deux également*; car le point D de la perpendiculaire D E étant également éloigné des points C C, puisque les deux côtés D C, D C sont égaux (231), le point E le sera aussi (207). Fig. 3.

243. *Les angles* C, C *opposés aux côtés égaux* D C, D C *d'un triangle isocele* D C C *sont égaux*; car si l'on tire la perpendiculaire D E, les deux triangles D E C, D E C seront égaux en tout, (239), à cause de D C = D C, de E C = E C (242), & du côté commun D E.

* 244. *Deux côtés* A B, A C *d'un triangle* A B C *demeurant les mêmes, plus l'angle* A *compris par ces côtés est grand, plus sa base est grande*. Je dis que si l'angle B A C devient D A C, A D demeurant = A B, le côté C D est plus grand que C B. Soit tirée la perpendiculaire A E sur le côté C B prolongé, s'il est nécessaire, & par le point D sa parallele D O, la ligne C B étant perpendiculaire à la ligne A E, le sera aussi à D O (214); C D lui sera donc oblique; & par conséquent C D est plus grande que C O, & à plus forte raison plus grande que C B. Pour la même raison si l'angle D A C devient G A C, le côté G C sera plus grand que D C, en supposant que G A = D A. Fig. 7.

* 245. *Les lignes paralleles à la base d'un triangle* A H E, *& qui remplissent toute l'aire du triangle, forment une progression arithmétique*. Soient les lignes B L, C K, D I paralleles à la base H E de ce triangle, & à égale distance l'une de l'autre; si l'on tire des points A, B, C, D, les perpendiculaires A P, B M, C N, D Q, elles formeront les triangles égaux en tout A P B, Fig. 8.

BMC, CND, DOE (240), à cause qu'elles sont égales (222), que les angles P, M, N, O sont droits (201), & que les angles correspondans ABP, BCM, CDN, DEO sont égaux entr'eux (227) : donc les lignes BP, CM, DN, EO sont égales. Maintenant soit tirée la perpendiculaire AG à toutes les paralleles (224) BL, CK, DI, EH, elle sera parallele (223) aux perpendiculaires BM, CN, DO, & les lignes BP & MR, CR & NS, DS & OG étant dans ce cas des perpendiculaires entre paralleles (205), seront égales (222) : donc la ligne infiniment petite A sera moindre que BP de BP, celle-ci moindre que CR de CM, CR moindre que DS de DN, & DS moindre que EG de EO : donc on a une suite de lignes A, BP, CR, DS, EG, qui prises consécutivement ont la même différence, ou, ce qui revient au même, qui forment une progression arithmétique (107).

Pour les mêmes raisons les lignes A, PL, RK, SI, GH forment une progression arithmétique, & par conséquent les lignes entieres A, BL, CK, DI, EH. On peut encore appliquer la même démonstration à une infinité de lignes qui rempliroient les intervalles AP, PR, RS, SG, & qui seroient à une égale distance infiniment petite, ou qui se suivroient immédiatement. Donc les lignes, &c.

Fig. 91. 246. *Deux triangles* ABC, Abc, *qui ont un angle* A *commun, & les côtés* BC, bc *opposés à cet angle parallele, sont semblables*; car, outre l'angle commun, les angles B, C sont égaux à leurs correspondans *b*, *c* (227).

* 247. *Réciproquement, si deux triangles* ABC, Abc, *qui ont un angle* A *commun & les côtés homologues confondus, sont semblables, leurs côtés* BC, bc *opposés à l'angle commun, sont paralleles*; car les angles B, C ne peuvent être égaux à leurs correspondans *b*, *c*, sans que

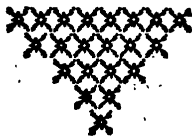
que les lignes BC, *bc* soient paralleles (229).

PROBLEMES.

248. *Pour faire un triangle* A *égal à un autre triangle* B, *dont on connoît les trois côtés*, menez la ligne HG égale à la ligne LK, fixez le compas en H, & de l'intervalle LM décrivez une courbe RS, ensuite du point G & de l'intervalle KM décrivez en une autre PQ, qui coupe la premiere; du point d'intersection I tirez des lignes en H & en G; le triangle A sera égal au triangle B, puisque par la construction il aura tous ses côtés égaux aux côtés de B, chacun à chacun (239). Fig. 6.

* 249. *Pour faire un triangle* A *égal à un triangle* B, *dont on connoît un côté* LM, *& les deux angles* L, M *adjacens à ce côté*, menez HI égale à LM, faites les angles H, I égaux aux angles L, M, chacun à chacun, (216) par le moyen des lignes HG, IG, qui se rencontreront en un point G, & le triangle A sera égal au triangle B (240).

* 250. *Pour faire un triangle* A *égal à un triangle* B, *dont on connoît deux côtés* KL, KM *& l'angle compris* K, tirez la ligne GH égale à la ligne KL; sur le point G tirez la ligne GI égale à la ligne KM, & qui fasse l'angle G égal à l'angle K (216), joignez les points H, I; le triangle A sera égal au triangle B (241).





LEÇON TROISIÈME.

DES PROPRIETÉS DU CERCLE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

DÉFINITIONS.

Fig. 10. 251. Si la ligne AB roule ſur ſon point C que je ſuppoſe en être exactement le milieu, tandis que ſon point A ira ſucceſſivement en F, en D & en B, le point B ira en G, en E & en A. La trace de cette ligne mobile s'appelle un *cercle*, la courbe décrite par les points A, B en eſt la *circonférence*. Une partie quelconque AF de la circonférence eſt un *arc*. L'eſpace terminé par la circonférence du cercle en eſt l'*aire* ou le *plan*; le point C de cet eſpace qui a ſervi de pivot à la mobile eſt le *centre*. Une ligne quelconque CA, tirée du centre à la circonférence eſt un *rayon*. Une ligne AB tirée d'un point de la circonférence à l'autre, & qui paſſe par le centre, eſt un *diamètre*; ſi elle ne paſſe pas par le centre, comme AE, c'eſt une *corde*. Si une corde eſt prolongée au-delà du cercle, comme KD, c'eſt une *ſécante*: enfin une droite OP qui touche la circonférence d'un cercle ſans la couper, eſt une *tangente*.

252. La partie C*m* de la mobile décrit évidemment un cercle, dont *mn* eſt un arc en même tems que la mobile entiere décrit le cercle ADBEA. Ces *deux cercles* s'appellent *concentriques*, à cauſe qu'ils ont le même centre; *ils ſont toujours à une égale diſtance* A*m* *l'un de l'autre*.

253. *Il suit de la construction du cercle qu'il peut être défini une figure terminée par une courbe, dont tous les points sont également éloignés du centre*; sçavoir, de la moitié A C de la mobile A B, qui l'a formé; ou, ce qui revient au même, le cercle est une figure *dont tous les rayons*, & par conséquent *les diamétres*, qui sont doubles des rayons, sont égaux.

THÉOREMES.

254. *Le rayon* C D *est perpendiculaire à la tangente* O P; car le rayon est la plus courte ligne qu'on puisse mener du centre à la tangente, puisqu'elle n'entre pas dans le cercle. Donc, &c. (210).

255. *Le diamétre divise le cercle, & la circonférence en deux également*; car la moitié C A de la mobile A B a balayé évidemment autant d'espace pour arriver dans la situation C B, & le point A a fait autant de chemin pour arriver en B, que l'autre moitié C B de la mobile a balayé d'espace pour arriver dans la situation C A, & que le point B a fait de chemin pour arriver en A.

256. On divise la circonférence de tout cercle, petit ou grand, en 360 parties égales, qu'on appelle *degrés*, chaque degré en 60 *minutes*, chaque minute en 60 *secondes*, chaque seconde en 60 *tierces*, &c.; cette division a paru la plus commode. D'où il suit *que la grandeur d'un degré est proportionnelle à celle de la circonférence dont il fait partie* (116), puisque les degrés étant les 360mes parties des circonférences entieres, en sont des parties semblables.

257. Une des principales propriétés du cercle est d'être la mesure des angles. Nous en traiterons dans un article séparé, qui contiendra la solution de ce problême général, *déterminer la mesure d'un angle en quelque endroit que son sommet soit placé, pourvû que ses côtés*

prolongés, s'il le faut, coupent ou touchent une circonférence de cercle dans des points déterminés.

DE LA MESURE DES ANGLES.

DÉFINITIONS.

258. Un angle A C F (*fig.* 10.) dont la pointe est au centre d'un cercle, s'appelle *angle au centre*; il s'appelle *angle inscrit*, s'il est formé à la circonférence par le concours de deux cordes, comme B A B (*fig.* 11.); *angle du segment*, s'il est formé à la circonférence par le concours d'une corde & d'une tangente, comme D A B, ou C A B (*fig.* 12.).

THÉOREMES.

Fig. 10. 259. *On mesure tout angle* A C F *par l'arc de cercle* A F *compris entre ses côtés, & décrit de la pointe* C *comme centre*; car l'arc A F mesure le nombre de pas que feroit le point A pour arriver en F, si la ligne C A rouloit sur son point C jusqu'à ce qu'elle fût parvenue dans la situation C F.

Si donc l'arc A F est de 30 degrés (ou comme on l'écrit ordinairement de 30°), on dit que l'angle A C F est de 30°, & on appelle un angle double, triple, &c. d'un autre angle, si l'arc compris entre ses côtés contient deux fois, trois fois, &c. autant de degrés que l'arc compris entre les côtés du second.

* 260. *Scholie.* Afin que l'arc compris entre les côtés d'un angle & décrit de sa pointe comme centre, puisse en être la mesure, il suffit qu'un angle soit déterminé par le nombre des degrés de cet arc; or cela est ainsi:
Fig. 1. 1°. puisque les arcs I K, P O compris entre les côtés
& 2. de deux angles égaux, D A O, C E B, & décrits à la

même distance de la pointe, sont nécessairement égaux ; ce qui paroît évident si l'on couche l'angle D A O sur l'angle C E B, I sur O, K sur P ; car dans ce cas les arcs I K, O P se confondront, puisque les angles étant dans cette position, il résultera la même trace du mouvement du point K, ou du point P : 2°. puisque les arcs A F, *m n* décrits à différentes distances de la pointe C du même angle, ou, ce qui est la même chose, de deux angles égaux, contiennent un même nombre de degrés ; car les points A, *m* de la mobile A B commencent & finissent en même-tems leur révolution ; ils en ont fait aussi en même-tems le quart, le tiers, la moitié, &c. : donc les arcs A F, *m n*, décrits en même-tems, sont des parties semblables des circonférences entieres dont ils font partie, & par conséquent ils contiennent un même nombre de degrés. Fig. 102

261. *Un angle droit* D C B *a pour mesure un arc de* 90°, *ou le quart du cercle*, car il a pour mesure l'arc D B (259) : or l'arc D B est le quart du cercle, car A D B en est la moitié (255) ; & D C ne penchant pas plus vers A que vers B, il reste à D autant de chemin à faire pour arriver en B, qu'il en a fait depuis le point A ; ainsi D B est la moitié de A D B, ou le quart de A D B E A.

262. *Un angle aigu* F C A *a pour mesure moins de* 90°, *& un angle obtus* F C B *plus de* 90° ; car le premier comprend entre ses côtés moins que le quart du cercle décrit de sa pointe comme centre, & le second en comprend plus que le quart.

263. *Une ou plusieurs droites* F C, D C *qui se terminent au même point* C *d'une droite* A B, *ou qui la coupent, font sur elle des angles, dont la somme est dans le premier cas, de* 180°, *& dans le second, de* 360° ; car si l'on prend C pour centre d'un cercle dont A B sera le diamétre, les angles A C F, F C D, D C B comprendront, pris ensemble entre leurs côtés, la demi-

circonférence ADB (255); & si l'on y joint les angles BCG, GCE, ECA, ils comprendront tous ensemble entre leurs côtés la circonférence entiere.

264. *Étant connu un des angles* ACF *formés par la rencontre ou par l'intersection de deux lignes* AB, FC, *ou* AB, FG, *on connoît les autres.* 1°. On connoît FCB, puisqu'étant le supplément de FCA, il est de 180° moins l'angle connu FCA! 2°. chacun de ces deux angles est égal à son opposé par la pointe.

265. *Dans tout triangle, si on connoît deux angles, on connoît le troisiéme;* car puisqu'il est le supplément des deux autres (235), il est de 180° moins les degrés qui mesurent les deux autres. Pour la même raison, si l'on connoît un angle d'un triangle, on connoît la somme des deux autres.

Fig. 11. 266. *Un angle inscrit quelconque* BAB *a pour mesure la moitié de l'arc* BB *compris entre ses côtés*, c'est-à-dire que si l'arc BB est de 60°, un arc qu'on décriroit du point A, comme centre, & qui seroit compris entre les côtés AB, AB, ne seroit que de 30°.

Soit décrit du point A, pris pour centre, & de l'intervalle AC = CB l'arc FG; soient tirés le diamétre AD & les rayons CB, CB, le triangle CAB est isocele (231), à cause des rayons CA, CB (253); les angles CAB, CBA sont égaux (243), & ils valent, pris ensemble, l'angle extérieur BCD (237): donc l'un d'eux CAB n'est que la moitié de l'extérieur BCD: donc l'angle total BAB n'est que la moitié de l'angle total BCB, qui a pour mesure l'arc BB. Cela posé, soit l'angle BCI, la moitié de l'angle total BCB, il sera égal à l'angle BAB: donc les arcs BI, BI, FG, qui mesurent les angles égaux BCI, BCI, BAB, & qui sont décrits à la même distance de la pointe, sont égaux (260), & par conséquent contiennent un même nombre de degrés: donc l'arc

F G contient moitié moins de degrés que l'arc B B. Pareillement l'angle E A F, dont les deux côtés ne comprennent pas le centre, a pour mesure la moitié de l'arc E B compris entre ses côtés; car les angles E A G, B A B qui comprennent chacun le centre entre leurs côtés, ont pour mesure, comme on vient de le démontrer, l'un $\frac{1}{2}$ E D B, & l'autre $\frac{1}{2}$ B B : donc en soustrayant de la mesure de l'angle E A G celle de l'angle B A B, il restera à l'angle E A F pour mesure $\frac{1}{2}$ E B.

267. *L'angle du segment* D A B *a pour mesure la moitié de l'arc* A E B, *compris entre ses côtés* D A, B A, *& sous-tendu par la corde* B A; car soit tiré le diamétre A E, l'angle D A E étant droit (254), a pour mesure la moitié de la demi circonférence A G E (261 & 255), & l'angle E A B la moitié de l'arc E B (266): donc l'angle total D A B a pour mesure $\frac{1}{2}$ A E B. Fig. 12.

Les angles B A C, B A D ayant tous ensemble pour mesure 180°, ou la demi-circonférence (263), & l'angle D A B ayant pour mesure $\frac{1}{2}$ A E B, il reste à l'angle C A B pour mesure $\frac{1}{2}$ A B.

268. Il suit de là, 1°. *qu'un angle inscrit est appuyé sur un arc moindre que la demi circonférence, s'il est aigu; sur la demi-circonférence, ou sur les extrémités du diamétre, s'il est droit; sur un arc plus grand que la demi-circonférence, s'il est obtus; & réciproquement.*

269. 2°. *Que tous les angles inscrits, appuyés sur le même arc ou sur des arcs égaux, sont égaux.*

* 270. *Tout angle* B A S *formé à la circonférence par le concours d'une corde* A B *& d'une sécante* S E, *a pour mesure la moitié des arcs* A B, A E *sous-tendu par la corde* B A, *& par la partie intérieure* A E *de la sécante* S E; car les angles B A S, B A E ayant pour mesure, pris ensemble, la demi circonférence (263), & l'angle inscrit E A B ayant pour mesure $\frac{1}{2}$ E B (266), il reste à l'angle B A S pour mesure $\frac{1}{2}$ A B + $\frac{1}{2}$ A E. Fig. 11.

Fig. 12. * 271. *Tout angle* G I E, *dont la pointe se trouve entre le centre & la circonférence, a pour mesure la moitié des arcs* G E, O A *compris entre ses côtés prolongés de part & d'autre du point de concours* I *jusqu'à la circonférence*. Joignez les points A, E par la droite A E, l'angle G I E se trouvera extérieur au triangle A I E, & par conséquent à la somme des intérieurs I A E, I E A (237), dont l'un a pour mesure $\frac{1}{2}$ G E, l'autre $\frac{1}{2}$ O A (266). Donc, &c.

Fig. 13. * 272. *Tout angle dont la pointe* A *est hors d'un cercle, soit qu'il soit formé par deux sécantes, ou par une sécante & par une tangente, ou par deux tangentes, a pour mesure la moitié de l'arc concave sur lequel il est appuyé, moins la moitié de l'arc convexe coupé ou intercepté par ses côtés.*

1°. L'angle D A E a pour mesure $\frac{1}{2}$ D E — $\frac{1}{2}$ I O. Soit tirée la corde D O, l'angle D O E extérieur au triangle D A O est égal à la somme des intérieurs D A O, A D O : donc l'un des intérieurs D A O est égal à l'extérieur D O E moins l'intérieur A D O, dont le premier a pour mesure $\frac{1}{2}$ D E, le second $\frac{1}{2}$ I O (266). Donc, &c.

2°. L'angle B A E a pour mesure $\frac{1}{2}$ B E — $\frac{1}{2}$ B O. Soit tirée la corde B O dans le triangle A O B, l'angle intérieur B A O est égal à l'extérieur B O E moins l'autre intérieur A B O, dont le premier a pour mesure $\frac{1}{2}$ B E (266), le second $\frac{1}{2}$ B O (267). Donc, &c.

Donc 3°. l'angle total B A B a pour mesure $\frac{1}{2}$ B E B — $\frac{1}{2}$ B O B.



De quelques autres propriétés du cercle.

THÉOREMES.

273. ON *peut faire passer une circonférence par trois points* A, B, C, *quelle que soit leur situation, pourvû qu'ils ne soient pas en ligne droite*, ou, ce qui est la même chose, *par les trois angles d'un triangle quelconque* ABC. Il ne faut que joindre les points donnés par les droites AB, AC, BC, couper en deux également deux de ces lignes par les perpendiculaires (215) OD, OE, leur point de concours O sera le centre du cercle cherché ; car les trois lignes OB, OA, OC sont égales, puisque le point I de la perpendiculaire OD étant, par la construction, également éloigné de A & de B, le point O l'est aussi nécessairement (207), & que, pour la même raison, le point O est aussi éloigné de C que de A. Fig. 14

274. *Dans le même cercle, ou dans des cercles égaux, des cordes égales* AE, AD, *soutendent des arcs égaux; & réciproquement*; car si l'on tire les rayons CE, CD, les triangles ACE, ACD, ayant tous leurs côtés homologues égaux, ont aussi leurs angles homologues ACE, ACD égaux (239); les arcs AE, AD, qui en sont la mesure, le sont donc aussi ; & réciproquement, si les arcs AE, AD sont égaux, les angles ACE, ACD, dont ils sont la mesure, le sont aussi ; & par conséquent les triangles ACE, ACD, ayant deux côtés homologues égaux autour d'un angle égal, sont égaux en tout (241) : donc les cordes AE, AD sont égales. *Des cordes inégales soutendent des arcs inégaux, & réciproquement*, puisque si elles soutendoient Fig. 15

des arcs égaux, elles feroient égales, & réciproquement.

275. Il fuit de là *que dans tout triangle, des angles égaux ont des bafes égales, & réciproquement des côtés égaux font les bafes d'angles égaux*; car fi l'on fait paffer une circonférence de cercle par fes trois angles, (ce qui eft toujours poffible (273)), des angles égaux auront pour bafes des cordes d'arcs égaux, & par conféquent égales (274); & les côtés égaux feront les cordes d'arcs égaux, & par conféquent les bafes d'angles égaux (269). Pour la même raifon *le plus grand angle a la plus grande bafe, le plus petit a la plus petite, & réciproquement.*

276. Donc 1°. *dans un triangle ifocele les angles oppofés aux côtés égaux font égaux* : 2°. *fi un triangle a deux angles égaux, il eft ifocele* : 3°. *un triangle équilatéral a les trois angles égaux, & réciproquement.*

Fig. 14. * 277. *De deux triangles* BAC, BOC *qui ont la même bafe* BC, *& dont l'un* BOC *eft tout entier au dedans de l'autre, le plus petit a l'angle* O, *oppofé à la bafe commune, plus grand que l'angle* A *du plus grand triangle oppofé à la même bafe.* Car fi l'on fait paffer une circonférence de cercle par les trois angles du plus grand triangle, l'angle A fera infcrit, & l'angle O fera dans le cercle. Soit donc qu'il foit au centre, ou entre le centre & la circonférence, il aura pour mefure un plus grand arc que l'angle A (259, 266, 271).

Fig. 15. 278. *Une droite* CD *qui a deux de ces conditions, être perpendiculaire à une corde* AB, *la couper en deux également, & paffer par le centre* C, *a néceffairement la troifiéme.* Ce théorême a trois parties.

1°. Le rayon CD étant perpendiculaire à la corde AB, la coupe en deux également; car le point C étant également éloigné de A & de B (253), le point O le fera auffi (207).

2°. Le rayon C D coupant en deux également la corde A B, lui est perpendiculaire ; car dans ce cas il a deux points O, C également éloignés des mêmes points A, B de la corde A B ; le premier, par la supposition, & le second, parce qu'il est le centre du cercle : donc (209) ce rayon est perpendiculaire à la corde A B.

3°. Si la ligne C D est perpendiculaire à la corde A B, & la coupe en deux également, elle passe par le centre ; car le point O de cette perpendiculaire étant également éloigné des points A, B, par la supposition, chacun de ses autres points le sera aussi (207) : donc le centre étant également éloigné des mêmes points, il se trouvera dans la droite C D suffisamment prolongée.

279. *Tout rayon perpendiculaire à une corde, coupe en deux également l'arc soutendu par cette corde*; car le point C du rayon C D étant aussi éloigné de A que de B (253), le point D le sera aussi (207) : donc les cordes D A, D B sont égales, & par conséquent leurs arcs sont aussi égaux (274).

* 280. *Deux cordes* A B, D E, *qui se croisent dans tout autre point que le centre* C, *ne peuvent se couper en deux également*; car si cela étoit, un rayon C I, qui passeroit par leur point d'intersection, seroit perpendiculaire à ces deux cordes (278), puisqu'il couperoit chacune en deux également ; & par conséquent du point O on pourroit élever sur le rayon C I deux perpendiculaires O B, O E, ce qui est impossible (201). Fig. 16.

281. *Les arcs de cercle* A G, D B, *ou* G O, D O *compris entre les paralleles* A B, G D *ou* G D, E F, *sont égaux*. Soit le rayon C O perpendiculaire à toutes ces paralleles ; je dis 1°. que l'arc G O D est coupé en deux également par le rayon C O (279), ou que G O = O D : 2°. que pour la même raison A O = O B, & par conséquent A G = D B. Fig. 17.

282. *La tangente* O P *ne touche le cercle qu'en un seul* Fig. 10.

point D ; car le rayon C D est la ligne la plus courte qu'on puisse mener du centre à la tangente (210 & 254) : donc aucun des autres rayons, qui sont tous égaux à C D, n'atteint la tangente : elle ne touche donc le cercle que par le point D.

* 283. *Deux cercles ne peuvent se toucher ; soit en de-*
Fig. 18. *hors*, comme F E G, I E K ; *soit en dedans*, comme I E K, A E D *que par un point* E.

1°. S'ils se touchent en dehors, qu'on fasse passer entre les deux cercles par le point de contact E la tangente P Q, chacun n'aura de commun avec elle, ni par conséquent avec l'autre cercle, que le point E (282).

2°. S'ils se touchent en dedans, qu'on fasse passer la tangente P Q par le point commun E ; les rayons des deux cercles A E D, I E K, qui aboutiront au même point E de la tangente P Q, lui seront tous les deux perpendiculaires (254), & par conséquent ils se confondront (201). Soit donc B E le rayon du cercle A E D, & C E le rayon du cercle I E K : cela posé, je dis que si le point O, que je suppose être le premier après E, étoit commun aux deux cercles, les deux rayons O B, O C seroient perpendiculaires à la tangente qui passeroit par le point O (254) ; ce qui est impossible (201).

* 284. *On ne peut faire passer aucune ligne droite en-*
Fig. 10. *tre la tangente* D P *& la circonférence* D B *d'un cercle ; mais on peut y faire passer une infinité de circonférences ;* car 1°. toute autre ligne K D que la tangente étant oblique au rayon C D (201), on pourroit tirer du centre C à cette ligne une perpendiculaire C I plus courte que le rayon C D (210) : donc la ligne K D entreroit dans le cercle.

Fig. 18. 2°. Supposons que la ligne B E en tournant sur son point B décrive le cercle A E D, & soit tirée par le point E la tangente P Q ; si la ligne B E est prolongée

en C, & si la toute C E tourne sur son point C, elle décrira une circonférence de cercle I E K, qui n'aura de commun avec la tangente (282), & avec le cercle A E D, que le point E (283). Il en seroit de même d'une infinité d'autres circonférences que décriroit de divers points pris pour centre la ligne C E prolongée à l'infini. Donc, &c.

* 285. *De toutes les droites, qui partant d'un point A placé hors du cercle, ou à la circonference, ou entre le centre & la circonférence*, comme A E, A B, A D, A F, *aboutissent à la circonférence concave*: 1°. *celles qui passent plus près du centre sont les plus longues*; car dans les triangles A C F, A C D, le côté C D demeurant égal au côté C F, la ligne A D est opposée à un plus grand angle que la ligne A F: donc (244) elle est plus longue que A F. Fig. 19. 20 & 21.

2°. *Celle qui passe par le centre*, comme A B, *est la plus longue*; car on peut la regarder comme la base d'un angle A C B infiniment obtus, dont les côtés A C, C B sont égaux à ceux des angles A C D, A C F.

* 286. *Tout au contraire de toutes les droites* A G, A E, A B, A D, A F, *qui partant d'un point A placé hors d'un cercle, aboutissent à sa circonference convexe*: 1°. *celles qui prolongées passeroient plus près du centre sont les plus courtes*; car dans les triangles A C F, A C D, le côté C D demeurant égal au côté C F, la ligne A D est opposée à un plus petit angle que la ligne A F: donc (244) elle est plus courte que A F. Fig. 22.

2°. *Celle qui prolongée passeroit par le centre est la plus courte*, comme A B; car la droite A C est plus courte que les courbes A D C, A F C; mais la partie C B de cette droite est égale aux parties C D, C F des courbes A C D, A C F: donc le reste A B de la droite est plus court que les restes A D, A F, de ces courbes.

3°. *Les tangentes* AG, AF *sont egales;* car si l'on joint les points de contact G, F par la corde GF, on aura le triangle isocelle AGF (276), à cause des angles du segment AFG, AGF, qui ayant chacun pour mesure la moitié de l'arc GBF (267), sont égaux.

* 287. *Dans les deux cas proposés dans les* n°. 285 *& 286*, 1°. *les lignes qui passent à égales distances du centre sont égales*, comme AE, AD. Soient tirées (*fig.* 19, 20 & 21) du centre C les perpendiculaires CO, CI sur les lignes AE, AD, elles sont égales, puisqu'elles mesurent par la supposition des distances égales (211): cela posé, soit couché le triangle ACE sur le triangle ACD, CO sur son égale CI, ces deux lignes ne pourront se confondre sans que les lignes AE, AD, qui leur sont perpendiculaires, ne se confondent aussi; & comme le côté CE est égal au côté CD du triangle ACD, le point E du côté CE s'appliquera au point D; puisque s'il aboutissoit à un point plus ou moins éloigné de I dans la ligne ID, la ligne CE seroit plus ou moins oblique, & par conséquent (210) plus ou moins longue que CD.

Pour la même raison le point A du triangle ACE s'appliquera au point A du triangle ACD; & partant les lignes AE, AD se couvriront exactement.

Pour ce qui est des lignes AE, AD dans la figure 22, il est évident qu'elles sont égales, puisque les toutes AH, AI le sont, de même que les cordes EH, DI, comme on vient de le prouver.

2°. *Il ne peut y en avoir dans aucun cas que deux égales entr'elles*, puisqu'il n'y en a que deux qui puissent passer à égale distance du centre.

* 288. *Si trois lignes tirées d'un point au dedans du cercle à la circonference sont égales, ce point en est le*

centre, puisque s'il n'étoit pas le centre, on ne pourroit tirer de ce point que deux lignes égales à la circonférence (287).

* 289. *Deux cercles égaux, ou inégaux, ne peuvent se couper en plus de deux points;* car s'ils pouvoient se couper en trois points, on pourroit tirer du centre d'un des deux cercles trois lignes égales aux trois points d'interfection de la circonférence de l'autre, ce qui est impossible (287).

* 290. Donc *deux cercles qui ont trois points communs, ont le même centre, & sont confondus; & s'ils n'ont qu'un ou deux points communs, ils sont excentriques*, c'est-à-dire ont un centre différent.

PROBLÊME.

291. Pour *diviser un arc donné* ADB *en deux également*, coupez la corde AB de cet arc en deux également par une perpendiculaire DC (215), elle passera par le centre de l'arc (278), & divisera l'arc donné en deux également (279). Fig. 15.

292. Pour *diviser un angle* ACB *en deux également*, décrivez du sommet C l'arc ADB, divisez-le en deux également (291), & du sommet C de l'angle menez une droite CD au milieu de l'arc, elle divisera l'angle donné en deux également, puisque chacun des angles ACD, DCB aura une égale mesure.

On pourra, en continuant de diviser chaque partie de l'angle donné en deux également, le diviser en 4, 8, 16, 32, &c. parties égales; mais on ne peut diviser géométriquement un angle, ou un arc quelconque en trois parties égales, par la regle & le compas; c'est là le fameux problême de la *trisection de l'angle*, tant cherché par les anciens; à plus forte raison, on ne peut diviser un angle, ou un

arc en 5, 7, 9, &c. parties égales par la Géométrie élémentaire.

Fig. 14. * 293. Pour *trouver le centre d'un arc* BAC, tirez des deux extrêmités de cet arc deux cordes BA, CA, à un point quelconque A de cet arc; coupez-les en deux également par les perpendiculaires (215) DO, EO, chacune d'elles passera par le centre de l'arc (278), & par conséquent elles s'y croiseront.

* 294. Pour *continuer un arc donné*, il faut en chercher le centre (293); le reste est aisé.

295. Pour *mener une tangente à un point donné* D *de la circonférence d'un cercle*, tirez à ce point le rayon CD, & sur son extrêmité D, élevez la perpendiculaire DP (213), ce sera la tangente demandée (254).

Fig. 13. * 296. *Pour mener une tangente* DI, *d'un point donné* D *hors d'un cercle donné* EI *à ce cercle*, menez au centre C de ce cercle la ligne DC; du point donné D, divisez-la en deux également; du milieu O & de l'intervalle OC = OD, décrivez le demi-cercle DIC; du point donné D, menez une ligne au point d'intersection I des deux cercles, ce sera la tangente cherchée (254); car elle fera avec le rayon CI un angle droit (268), puisque cet angle étant inscrit au cercle DIC, est appuyé sur les extrêmités du diamètre DC de ce cercle.

J'aurois pu évidemment par la même méthode mener la tangente DE.





LEÇON QUATRIE'ME.

DES POLYGONES.

Propriété des polygones en général.

DEFINITIONS.

297. ON appelle en général *polygone* une figure rectiligne à plusieurs côtés. On lui donne le nom particulier de *triangle*, *quadrilatere*, *pentagone*, *exagone*, *eptagone*, *octogone*, *ennéagone*, *décagone*, *undécagone*, *dodécagone*, *&c.* selon qu'elle a 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, &c. côtés.

298. Le polygone est appellé *symmétrique*, s'il a les côtés opposés paralleles & égaux, quoique ses angles ne soient pas égaux entr'eux; *régulier*, si tous les côtés sont égaux entr'eux; *irrégulier*, s'il n'est ni régulier ni symmétrique. *Voyez la figure* 33. Fig. 26. Fig. 27. 28. 29.

299. Un quadrilatere régulier est un quarré. S'il n'est que symmétrique, c'est un *parallelogramme*. Le parallelogramme dont tous les angles sont droits, s'appelle plus proprement *rectangle*; enfin un quadrilatere irrégulier est un *trapeze*. Une droite qui traverse un quadrilatere, en allant d'un angle à l'autre, s'appelle *diagonale*. Une droite tirée du point d'intersection de plusieurs diagonales d'un polygone régulier perpendiculairement à un des côtés, est appellée *l'apotheme* du polygone, & le point d'intersection de de ces diagonales est le *centre* du polygone. Fig. 28. Fig. 24. ou 25. Fig. 37.

300. Une figure est appellée *inscrite*, si tous ses angles sont inscrits au même cercle, & *circonscrite*, si tous ses côtés sont des tangentes du même cercle.

THÉOREMES.

Fig. 24. 26, 27, 28, 29. * 301. *La somme des angles d'un polygone quelconque, vaut autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés moins quatre angles droits*; car si on le réduit en autant de triangles qu'il a de côtés, en tirant d'un point O, placé au dedans de ce polygone, des lignes à tous ses angles, la somme des angles de tous ces triangles vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a de triangles ou de côtés dans le polygone; or si de cette somme on retranche quatre angles droits formés autour du point O, le reste est les angles du polygone : donc, &c.

Fig. 26. * 302. *Les supplémens d'un polygone quelconque* ABECDF, c'est-à-dire, les angles formés par chaque côté du polygone, & le prolongement de l'autre, *valent pris ensemble quatre angles droits*; car chacun de ces angles vaut avec l'intérieur son voisin deux angles droits : donc tous les angles du polygone avec leurs supplémens, valent autant de fois deux angles droits que le polygone a de côtés; or si de cette somme on soustrait quatre angles droits, le reste est la valeur des angles du polygone (301) : donc les supplémens pris ensemble valent quatre angles droits.

Propriétés des polygones symmétriques.

THÉOREMES.

Fig. 24. ou 25. 303. *La diagonale* AC *d'un quadrilatere* ABCD, *dont les côtés opposés sont égaux, le divise en deux trian-*

gles ABC, ADC *égaux en tout* (239); puisque, outre le côté commun, ils ont par la supposition les deux autres côtés égaux chacun à chacun.

304. *Tout quadrilatere dont les côtés opposés sont égaux à ces mêmes côtés paralleles, & réciproquement*; car les triangles ABC, ADC, étant égaux en tout (303), leurs angles homologues BAC, ACD sont égaux, & ces angles étant alternes, les lignes AB, DC sont paralleles (229). Pour la même raison les côtés AD, BC le sont aussi; réciproquement si les côtés AD, BC sont paralleles, ils sont égaux, & en général des droites paralleles tirées entre les mêmes paralleles, ou entre des paralleles également distantes, sont égales; car si on tire les perpendiculaires AE, BF, les triangles AED, BFC seront égaux en tout (240), à cause des angles droits E, F, des angles correspondans ADE, BCF & des lignes égales AE, BF (222).

305. *Les parallelogrammes* ABCD, *qui ont des bases égales* DC, *& des hauteurs égales*, ou, ce qui est la même chose, qui sont compris entre les mêmes paralleles, *sont égaux en surface*; cela est évident, 1°. pour deux rectangles ABCD, ABFE de même base & de même hauteur, puisqu'en les appliquant l'un à l'autre, ils se confondront nécessairement.

2°. Pour un rectangle & un parallelogramme; car si des angles A, B, du parallelogramme ABCD, on abaisse des perpendiculaires AE, BF, les triangles AED, BFC seront égaux en tout, comme on vient de le voir (304): donc DE = CF; donc EF = DC: donc le rectangle ABCD est égal au rectangle ABFE, qui est lui-même égal au parallelogramme ABCD, puisque les triangles ADE, BFC sont égaux en tout.

3°. Pour deux parallelogrammes, puisqu'ils sont

tous les deux égaux au même rectangle.

Fig. 24. 306. *Des triangles* BCD, BCD *de même base* DC, *& de même hauteur, sont égaux en surface;* car ils sont les moitiés (303) de parallelogrammes de même base & de même hauteur égaux entr'eux (305).

Fig. 26. * 307. *Des diagonales* AC, BD &c. *qui se croisent dans un polygone symmétrique,* 1°. *forment des triangles* AOB, DOC *opposés par la pointe, égaux en tout* (204); car le côté AB = DC (298), & les angles OAB, OBA sont égaux à leurs alternes OCD, ODC (225) chacun à chacun; il en est de même des autres triangles.

2°. *S'y coupent en parties égales;* car ces parties forment les côtés homologues de triangles égaux en tout.

3°. *Chacune partage le polygone en deux parties égales & semblables,* puisque chaque partie est composée d'un même nombre de triangles, dont les opposés par la pointe sont égaux en tout & semblablement posés.

* 308. Pareillement *une droite* GI, *qui passe par le centre d'un parallelogramme, forme avec les diagonales, des triangles* GOB, DOI *opposés par la pointe égaux en tout,* à cause des angles GBO, BGO égaux à leurs alternes ODI, OID chacun à chacun, & du côté BO = DO (307).

* 309. *On peut dire encore* pour les mêmes raisons *des droites non diagonales qui se croisent au centre d'un polygone symmétrique, ce que nous avons dit des diagonales même dans le* n°. 307.

Propriétés des polygones réguliers.

Fig. 27. 28. 29. 310. TOUTES *les lignes* AO, BO, EO, *qui divisent en deux également les angles d'un polygone régu-*

lier, vont aboutir au même point O *au dedans de ce polygone*; car les lignes qui divisent en deux également les angles A, B, E, forment deux triangles égaux en tout (240), à cause des côtés égaux AB, BE, & des angles adjacens à ces côtés, qui sont les moitiés d'angles égaux; mais la ligne qui divise l'angle B doit être un côté commun aux deux triangles : elle doit donc aboutir au point de concours O des deux autres lignes AO, EO; on peut aisément appliquer cette démonstration aux autres lignes.

311. *Si ayant divisé en deux également deux angles* A, B, *d'un polygone régulier par deux droites* AO, BO, *on tire de leur point de concours* O *des lignes aux autres angles, elles les diviseront tous en deux également*; car si on eut commencé par diviser en deux également ces autres angles par des droites, elles auroient abouti au point O (310) : donc, &c.

312. *On peut réduire un polygone régulier en autant de triangles isocelles égaux qu'il a de côtés*; car en divisant deux angles A, B en deux également par deux droites AO, BO, & en tirant d'autres droites aux autres angles du point de concours O; on divise le polygone, 1°. en triangles égaux en tout, comme on l'a vu ci-dessus (310); 2°. en triangles isocelles (276), puisque tous leurs angles adjacens aux côtés du polygone sont les moitiés (312) d'angles égaux.

313. *Tout polygone régulier est inscriptible & circonscriptible au cercle.* 1°. Pour l'inscrire, il ne faut que diviser en deux également deux angles A, B par les lignes AO, BO, prendre l'une d'elles pour rayon, & le point de concours O pour centre, le cercle passera par les autres angles E, C, &c. puisque les lignes AO, BO, EO, CO, &c. étant les côtés de triangles isocelles égaux en tout (312), sont égales.

2°, Pour le circonscrire, il faut prendre un apothême O G pour rayon, & le centre du polygone pour centre du cercle qu'on veut décrire, tous les autres côtés du polygone en seront des tangentes; car tous les autres apothêmes O R, O I, &c. étant les hauteurs de triangles isoscelles égaux en tout, sont égaux; le cercle dont il s'agit passera donc par leurs extrêmités, & les côtés du polygone étant perpendiculaires aux apothêmes, seront des tangentes du cercle (254).

* 314. *Un polygone régulier d'un nombre pair de côtés* Fig. 19. A B E C D F *est un polygone symmétrique.* Soit ce polygone inscrit dans un cercle, les centres O du cercle & du polygone seront confondus; les triangles formés par les côtés du polygone & les rayons du cercle, comme A O B, D O C, ayant tous leurs côtés homologues égaux, seront égaux en tout (239), & les angles O C D, O A B seront par conséquent égaux. Cela posé, dans les polygones réguliers d'un nombre pair de côtés les rayons opposés O A, O C ne sont qu'une droite; car un diametre qui partiroit de l'angle A, partageant en deux également la circonférence du cercle, & par conséquent le contour du polygone, aboutiroit à l'angle C, laissant trois côtés de part & d'autre; donc les angles égaux O A B, O C D sont alternes, & par conséquent (229) les côtés A B, D C sont paralleles.

Il suit de là que l'on peut appliquer aux polygones réguliers d'un nombre pair de côtés tout ce que nous avons dit dans les n°. 307, 308 & 309 des polygones symmétriques.

315. *Le côté d'un polygone régulier est la corde d'un arc de cercle égal à 360° divisés par le nombre des côtés du polygone;* car le polygone étant inscrit, ses côtés seront les cordes d'arcs égaux (274): donc le côté du pentagone soutendra la cinquième partie de la circon-

férence, ou $\frac{360°}{5}$; le côté de l'exagone en soutendra la sixiéme partie, ou $\frac{360°}{6}$. &c.

316. *L'angle au centre d'un polygone régulier est de 360°, divisés par le nombre des côtés de ce polygone*; car il a pour mesure l'arc soutendu par un des côtés du polygone.

317. *L'angle à la circonférence d'un polygone régulier est le supplément de l'angle au centre*; car dans le triangle A O B, les deux angles B A O, A B O sont supplément de l'angle au centre A O B (235); & ces deux angles pris ensemble sont égaux à l'angle A ou B tout entier, puisque B A O = A B O = E B O: donc l'angle d'un triangle régulier est de 60°, celui d'un quarré de 90°, celui d'un pentagone régulier de 108°, celui d'un exagone régulier de 120°, &c. Fig. 28. & 29.

318. *Le côté de l'exagone régulier est égal au rayon du cercle auquel il est inscrit*; car le triangle A O B est équilatéral (276), puisque tous ses angles sont égaux; en effet, l'angle au centre A O B est de $\frac{360°}{6} = 60$ (316): donc les deux autres, pris ensemble, sont de 120° (233); & comme ils sont égaux (312), chacun vaut 60°: donc A B = A O ou B O. Fig. 29.

319. *Le cercle est un polygone régulier d'une infinité de côtés infiniment petits, dont le rayon est l'apothême*; car, plus un polygone régulier inscrit au cercle a de côtés, plus son contour approche de la circonférence du cercle, & plus son apothême approche du rayon: donc si le polygone régulier a une infinité de côtés infiniment petits, son contour se confondra avec la circonférence, & son apothême avec le rayon du même cercle.

* 320. Parmi les propriétés du polygone régulier, il en est qui conviennent au triangle, quoique irrégulier, par exemple: *tout triangle est circonscriptible au* Fig. 27.

cercle. Divisez en deux également ses deux angles B, E, par deux droites B O, E O ; du point de concours O, tirez des perpendiculaires O I, O R, O G sur les trois côtés du triangle, elles seront les rayons du cercle cherché ; car 1°. elles sont égales, puisque les triangles O I E, O R E sont égaux en tout (240), à cause des angles droits I, R, des angles I E O, R E O égaux par la supposition, & du côté commun E O. Pour la même raison les triangles R O B, G O B sont égaux en tout ; & par conséquent O I = O R = O G ; mais d'ailleurs les côtés du triangle étant perpendiculaires à ces lignes, seront des tangentes du cercle décrit (254). Donc, &c.

* 321. *Les droites* A O, B O, E O *qui divisent en deux également les trois angles d'un triangle* A B E, *vont aboutir au même point* O *au dedans de ce triangle* ; car si ayant divisé en deux également les angles B, E par les droites B O, E O, on tire de leur point de concours O une ligne au troisiéme angle, elle le divisera en deux également, puisque les deux triangles A O G, A O I sont égaux en tout (239), à cause de O G = O I (319), de A G = A I (386), & du côté commun A O : donc si on eût divisé en deux également l'angle A par une droite, elle auroit abouti au point O. Quoique le triangle A B E paroisse régulier à l'œil, on voit bien que cette démonstration auroit lieu, quand bien même il seroit irrégulier.

PROBLEMES.

322. *Pour inscrire dans un cercle donné un exagone*
Fig. 29. *régulier* A B E C D F, portez six fois le rayon A O du cercle sur la circonférence (317).

Fig. 27. 323. *Pour inscrire un triangle équilatéral* A B E, tirez trois cordes, dont chacune soutende le même arc que soutendroient deux côtés de l'exagone, & pour

inſcrire un polygone de 12, 24, 48, &c. côtés, il ne faut que diviſer l'arc ſoutendu par le côté de l'exagone en 2, 4, 8, &c. parties égales (291).

324. *Pour inſcrire un quarré* A B E D *dans un cercle donné*, menez deux diametres A E, B D perpendiculaires l'un à l'autre, & joignez leurs extrémités par quatre cordes; car chacune ſoutendant le quart du cercle, elles ſeront égales (274); & chaque angle étant appuyé ſur les extrémités d'un diametre, ſera droit (268): donc la figure inſcrite ſera un quarré (299). En diviſant enſuite chaque quart de cercle en 2, 4, 8, &c. parties égales, on pourra inſcrire un polygone régulier de 8, 16, 32, &c. côtés. Fig. 282

* 325. *Pour circonſcrire un polygone régulier*, par exemple un exagone *à un cercle donné*, cherchez le milieu G de l'arc P Q, qui ſeroit ſoutendu par le côté de l'exagone inſcrit au cercle donné; par le milieu & par les extrémités de cet arc, menez du centre O le rayon O G & les indéfinies O A, O B; menez une tangente au point G (295), qui coupera les indéfinies aux points A, B, & de l'intervalle A O ou B O, décrivez le cercle A B E C D F, la ligne A B ſera un côté de l'exagone inſcrit au grand cercle, & circonſcrit au petit; car 1°. les deux triangles A O G, B O G étant égaux en tout, à cauſe qu'ils ſont rectangles en G, que les angles A O G, B O G ſont égaux par la conſtruction, & qu'ils ont un côté commun G O, les côtés A O, B O ſont égaux, c'eſt-à-dire que le triangle A O B eſt iſocele. 2°. Il eſt équilatéral, comme on l'a vu ci-deſſus (317): donc A B eſt le côté d'un exagone inſcrit au grand cercle A B E C D F (317). En continuant d'inſcrire cet exagone à ce grand cercle, on le circonſcrira en même-tems au petit; car cet exagone étant ſuppoſé inſcrit au grand cercle, ſi on vouloit décrire un cercle auquel il fût circonſcrit, on prendroit O G pour rayon, & O pour centre (317). Fig. 283



LEÇON CINQUIE'ME.

Des Lignes proportionnelles.

DEFINITIONS.

326. NOUS avons dit plus haut (232) que deux triangles sont semblables lorsque tous leurs angles homologues sont égaux; mais *afin que deux figures* X, *x* d'un plus grand nombre de côtés *soient semblables, il faut, outre l'égalité des angles homologues, qu'elles ayent un même nombre de côtés, & leurs côtés homologues proportionnels.*

Fig. 33.

327. On appelle *côtés homologues*, ceux qui se répondent lorsque les deux figures sont situées de la même maniere par rapport à nous, tels que sont les côtés A B, *a b*, ou A I, *a i*, &c.; *angles homologues*, ceux qui sont formés par des côtés homologues, comme A, *a*; *points homologues*, ceux qui sont placés comme F, *f* dans des côtés homologues, de façon que des droites A F, *a f* tirées à ces points des angles homologues A, *a* fassent du même côté des angles égaux A F E, *a f e*, ou A F G, *a f g*, ou des points placés au dedans de deux figures, comme S, *s*, tels que des lignes S G, S F, & *s g*, *s f* tirées de ces points à d'autres points homologues G F & *g f*, fassent des triangles S G F, *s g f* semblables. On appelle enfin *dimensions homologues* des lignes qui ne passent au dedans des figures semblables que par des points homologues. Nous verrons bientôt (340) qu'il suffit de sçavoir que

deux lignes AF, af ou SF, sf passent par deux points homologues AF, af ou SF, sf, pour être assuré qu'elles sont des dimensions homologues.

Théoremes.

328. *Deux lignes* AE, AH *qui font un angle, & qui sont coupées par un nombre quelconque de paralleles* LB, KC, ID, HE, *sont divisées en parties dont les homologues sont proportionnelles entr'elles & aux lignes entieres* AE, AH. Fig. 8.

1°. Si les paralleles sont également distantes, chaque ligne est coupée en parties égales : donc les parties homologues AL, AB & LK, BC, &c. sont des parties semblables des lignes entieres AH, AE, & par conséquent (116 & 117) elles sont proportionnelles entr'elles & aux lignes entieres AH, AE, c'est-à-dire que AL : AB :: LK : BC :: KI : CD :: IH : DE :: AH : AE.

2°. Qu'on suppose que ces paralleles sont à inégale distance l'une de l'autre. On concevra aisément les deux lignes AE, AH divisées par un nombre infini de paralleles infiniment proches & également distantes ; & deux parties homologues quelconques AL, AB, ou LK, BC des toutes AH, AE coupées par un même nombre de ces paralleles, qui prises deux à deux, comprennent des parties semblables des toutes, à cause de leur distance égale ; donc les parties homologues AL, AB, ou LK, BC des lignes AH, AE sont des composés d'un même nombre de parties semblables ; & par conséquent sont elles-mêmes des parties semblables des toutes AH, AE : donc elles sont proportionnelles entr'elles & à ces toutes.

329. *Deux triangles semblables* ABC, abc, *ont leurs côtés homologues proportionnels* ; c'est-à-dire AB : ab :: AC : ac :: BC : bc ; car si l'on couche l'angle Fig. 9.

a du triangle abc sur son égal A du triangle A B C, le côté bc sera parallele au côté BC (229), à cause des angles b, c égaux (232) à leurs correspondans B, C : donc (328) Ab : A B :: Ac : A C ou ab : A B :: ac : A C. Pour la même raison si l'on couche l'angle c sur son égal C, le côté ab sera parallele au côté A B, & l'on aura (328) Ca : C A :: Cb : C B, ca : C A :: cb : C B. Donc ab : A B :: ac : A C :: bc : B C.

* 330. *Deux triangles* A B C, a b c, *dont les côtés homologues sont proportionnels, sont semblables.* Qu'on transporte l'angle a sur l'angle A, ab sur A B, a sur A, qu'on tire par le point b, où aboutit l'extrémité du côté ab, la parallele bc au côté BC, on aura (328) Ab : A B :: Ac : A C ; mais on a aussi par la supposition ab ou Ab : A B :: ac : A C : donc Ac = ac ; car deux proportions ne peuvent avoir trois mêmes termes, sans que l'autre ne soit le même aussi dans chacune (137). Pareillement on a (246 & 329) Ab : A B :: bc :: B C ; & par la supposition en comparant le triangle abc au triangle ABC, on a ab ou Ab : A B :: bc : B C : donc le côté bc dans le triangle abc est égal à la parallele bc au côté B C : donc les deux triangles abc, Abc sont égaux en tout : donc le triangle Abc étant semblable (246) au triangle A B C, le triangle abc le sera aussi nécessairement.

* 331. *Deux triangles qui ont deux côtés proportionnels autour d'un angle égal sont semblables.* Soient les angles A, a égaux, & les côtés A B, A C proportionnels aux côtés ab, ac ; si l'on couche l'angle a sur son égal A, le point a sur le point A, les lignes ab, ac se confondront avec les lignes A B, A C : cela posé, soit ab = Ab, & soit tirée par le point b la parallele bc au côté B C, on a (328) Ab : A B :: Ac : A C ; & par la supposition ab ou Ab : A B :: ac : A C : donc ac =

A C : donc les deux triangles *a b c*, A *b c* sont égaux en tout (241) ; or le triangle A *b c* est semblable au triangle A B C (246) : donc le triangle *a b c* l'est aussi.

* 332. *Une droite* O L, *qui divise en deux également l'angle* O *d'un triangle* D O I, *coupe le côté* I D *opposé à cet angle en parties proportionnelles aux deux autres côtés*, c'est-à-dire D L : L I : : D O : O I. Soit tirée du point L la parallele L K au côté I O, l'angle I O L est égal à son alterne O L K (225), & par la supposition il est aussi égal à l'angle L O K : donc les angles L O K, O L K sont égaux, c'est-à-dire que le triangle O L K est isocele (275), & O K = L K ; cela posé, à cause des paralleles L K, I O, on a (328) D L : L I : : D K : K O = K L ; mais à cause des triangles semblables (246) D L K, D I O, on a (329) D K : KL : : D O : O I : donc (113) D L : L I : : D O : O I. Fig. 30.

333. *Les parties de deux droites* E D, F I, *qui se croisent entre deux paralleles* A B, C D, *sont proportionnelles entr'elles : elles sont réciproquement proportionnelles, si elles se croisent dans un cercle*, comme B G H I (*fig.* 31.). Dans le premier cas les triangles I O D, E O F sont semblables, à cause des angles I, D égaux à leurs alternes F, E (225) chacun à chacun : donc (329) O I : O D : : O F : O E. Dans le second cas les triangles B H F, G I F (*fig.* 31.) sont semblables, à cause des angles égaux en F opposés par la pointe, & des angles inscrits H B G, G I H pareillement égaux (269), puisqu'ils sont appuyés sur le même arc H G : donc (329) F G : F I : : F H : F B.

334. *Une droite* A D, *tirée du sommet* A *de l'angle droit d'un triangle rectangle* B A C *sur l'hypothénuse* B C, *est moyenne proportionnelle entre les deux segmens* B D, D C *de l'hypothénuse* ; car elle partage le triangle B A C en deux triangles B A D, C A D, dont chacun est semblable au triangle total, à cause qu'ils ont chacun un Fig. 31.

angle commun avec lui, & qu'ils sont rectangles comme lui : ils sont donc semblables entr'eux ; d'où on tire (329) : 1°. En comparant les deux triangles partiels BD : AD :: AD : DC, ou ∺ BD . AD . DC.

335. 2°. En comparant chaque triangle partiel avec le total BD : BA :: BA : BC, & DC : CA :: CA : BC, c'est-à-dire *chaque côté d'un triangle rectangle est moyen proportionnel entre l'hypothénuse entiere & le segment contigu.*

336. Une droite AD tirée de la circonférence d'un cercle perpendiculairement au diametre (on l'appelle *ordonnée au cercle*) *est moyenne proportionnelle entre les deux* segmens du diamétre qu'on nomme *abcisses* (334), puisque si du point A on tire des droites aux extrémités du diametre, le triangle BAC sera rectangle en A (268).

Fig. 32. 337. *Deux droites* AG, AI, *qui partant d'un même point* A *hors d'un cercle, aboutissent à sa circonférence concave, sont réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures* AD, AB. Tirez les cordes BG, DI, les triangles ABG, ADI sont semblables, à cause de l'angle A commun & des angles inscrits I, G appuyés sur le même arc BD, & par conséquent égaux (269) : donc (329) AG : AI :: AB : AD.

* 338. *La tangente* AE *d'un cercle est moyenne proportionnelle entre la sécante* AG *qui part du même point* A *hors du cercle & sa partie extérieure* AD. Tirez les cordes ED, EG, les triangles AED, AEG sont semblables, à cause de l'angle commun A & de l'angle inscrit AGE, qui a la même mesure (266) que l'angle du segment AED (267), c'est-à-dire la moitié de l'arc DE : donc (329) AG : AE :: AE : AD, ou ∺ AG . AE . AD.

* 339. *Si le diametre* DG *du cercle est égal à la tangente*, on pourra changer la proportion continue pré-

cédente en celle-ci, ∺ AG.DG.AD, c'est-à-dire que *la sécante* A G, *tirée du même point* A *hors du cercle que la tangente, est divisée en* D *par la circonférence*, de façon qu'elle est à sa plus grande partie D G comme cette partie est à la plus petite A D. On dit dans ces cas qu'une ligne est divisée *en moyenne & extrême raison*.

* 340. *Si dans deux figures semblables* X, x, *deux dimensions* F H, f h *passent chacune par deux points homologues* S, F & *s*, *f*, elles ne passent que par des points homologues, c'est-à-dire que (327) *ce sont des dimensions homologues*; car soient deux dimensions homologues dans ces deux figures, dont l'une passe par les points F, S, l'autre passera nécessairement par les points homologues *f*, *s*, (327); & l'une de ces dimensions ayant deux points F, S communs avec la ligne S F, & l'autre deux autres points *f*, *s* avec la ligne *f s*, elles se confondront (194) avec les lignes F S, *f s* chacune avec chacune; donc les lignes F S, *f s* sont des dimensions homologues. Fig. 332

* 341. *On peut réduire deux figures semblables* X, x *en un même nombre de triangles, dont les homologues sont semblables, en tirant de deux angles homologues* A, a *des lignes à tous les autres.* 1°. Il y aura un même nombre de triangles dans les deux figures, puisqu'elles ont nécessairement (326) un même nombre de côtés: 2°. les triangles homologues sont semblables, & en premier lieu les triangles A C B, *a c b* (331), puisqu'ils ont deux côtés proportionnels autour des angles égaux B, *b* (326): donc les angles B C A, *b c a* sont égaux, & de plus (329) A C : *ac* :: B C : *bc*; ou bien en mettant la raison des côtés D C, *d c* au lieu de celle des côtés B C, *b c* qui lui est égale (326), on aura A C : *ac* :: D C : *dc*: donc dans les triangles A C D, *a c d*, les côtés C A, D C & *c a*, *d c* sont proportion-

nels : & de plus les angles D C A, *dca*, compris par ces côtés, ſont égaux, puiſqu'ils ſont les reſtes des angles égaux D C B, *dcb*, dont on a ſouſtrait les angles égaux B C A, *bca* : donc les triangles homologues A C D, *acd* ſont ſemblables (331). On prouveroit de même que les triangles A D E, *ade* & A E G, *aeg*, &c. ſont ſemblables. Il n'eſt pas moins évident que les triangles A E F, *aef* ſont ſemblables, puiſque les angles A E F, A F E ſont égaux (327) aux angles *aef*, *afe*, chacun à chacun.

* 342. *Réciproquement ſi l'on peut réduire deux figures* X, x *en un même nombre de triangles, dont les homologues ſoient ſemblables, en tirant de deux angles homologues* A, a, *des lignes à tous les autres, ces deux figures ſont ſemblables;* car 1°. puiſque le nombre des triangles homologues eſt égal, les figures ont un même nombre de côtés : 2°. puiſque les triangles homologues ſont ſemblables, les angles homologues de la figure étant les angles homologues des triangles ſemblables, comme B, *b*, ou I, *i*, ou des compoſés d'un même nombre de ces angles homologues, comme C, *c*, ou A, *a*, ſont égaux : 3°. les triangles homologues B A C, *bac* & C A D, *cad*, &c. étant ſemblables, on a (329) A C : [illegible] :: B C : *bc*; & pareillement A C : *ac* :: C D : *cd* : donc (113) B C : *bc* :: C D : *cd* : en continuant ainſi, on formera de tous les autres côtés homologues une ſuite de raiſons égales : donc (326) les figures X, *x* ſont ſemblables.

* 343. *Les contours de deux figures ſemblables* X, x *ſont entr'eux comme deux de leurs côtés homologues quelconques*; car dans la ſuite de raiſons égales A B : *ab* :: B C : *bc* :: C D : *cd* :: D E : *de* :: E G : *eg* :: &c. que donnent (326) ces deux figures, la ſomme des antécédens, ou le contour de la grande figure eſt à la ſomme des conſéquens, ou au contour de la petite figure,

figure, comme un antécédent quelconque, ou un côté quelconque de la premiere figure est à son conséquent, ou au côté homologue de la seconde figure (136).

* 344. *Deux dimensions homologues quelconques de deux figures semblables* X, x, *sont entr'elles comme deux côtés homologues quelconques des deux figures*; car ou ces dimensions homologues sont tirées d'angle à angle, comme A E, *ae*, ou d'angle à côté, comme A F, *af*, ou de côté à côté, comme F H, *fh*; or toutes ces dimensions homologues sont proportionnelles à deux côtés homologues quelconques des deux figures X, *x*: 1°. les deux triangles D A E, *dae* étant semblables (341), on a (329) A E : *ae* :: D E : *de* :: D C : *dc* :: &c. 2°. Les deux triangles E A F, *eaf* étant aussi semblables (341), on a (329). A F : *af* :: A E : *ae* :: D E : *de*. 3°. Les deux triangles F G H, *fgh* étant semblables (327), on a F H : *fh* : : F G : *fg* : or F G : *fg* : : E G : *eg*; car les triangles semblables A F G, *afg* donnent A G : *ag* : : F G : *fg* (329); mais à cause des triangles semblables A G E, *age*, on a aussi A G : *ag* : : E G : *eg*: donc (113) F G : *fg* : : E G : *eg*; & par conséquent F H : *fh* :: E G : *eg*.

* 345. *Donc deux dimensions homologues quelconques sont aussi proportionnelles dans les figures semblables à deux autres dimensions homologues tirées de la même ou de différente maniere, aussi bien qu'aux contours des deux figures*; car 1°. la raison de deux côtés homologues étant la même (344) que celle de deux dimensions homologues quelconques, il faut nécessairement que la raison de deux dimensions homologues soit la même que celle de deux autres dimensions homologues quelconques (113); ainsi A C : *ac* :: A E : *ae* :: F H : *fh* : : A F : *af*, &c. 2°. La raison de deux côtés homologues étant la même que celle des contours des deux figures (343), & que celle de deux dimensions

homologues quelconques, il est nécessaire que la raison des contours & de deux dimensions homologues quelconques soit aussi la même (113).

* 346. *Deux polygones réguliers de la même espéce*, c'est-à-dire d'un même nombre de côtés, *& par conséquent deux cercles*, qui sont des polygones réguliers d'un même nombre infini de côtés (319), *sont des figures semblables*. 1°. Les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre; car dans deux polygones réguliers de la même espéce l'angle au centre étant le même, l'angle à la circonférence, qui est son supplément (317), est aussi le même. 2°. Les côtés de chaque polygone régulier étant égaux entr'eux, si un côté du grand polygone est double ou triple, &c. d'un côté du petit, chaque autre côté du premier sera double ou triple &c. de chaque autre côté du second, c'est-à-dire que ces deux polygones ont leurs côtés proportionnels. Donc (326), &c.

* 347. *Les rayons, les diametres, les arcs* d'un égal nombre de degrés, qu'on appelle *arcs semblables, les cordes de ces arcs, & les circonférences entieres de deux cercles, sont des grandeurs proportionnelles*; car deux cercles sont des figures semblables (346), les rayons, les diametres, les arcs semblables, leurs soutendantes, sont des dimensions homologues, qui sont (345) par conséquent proportionnelles entr'elles, & aux circonférences entieres des deux cercles.

* 348. *Deux dimensions homologues quelconques* A F, a f *de deux figures semblables* X, x *les divisent en parties dont les homologues sont des figures semblables*; ainsi A B C D E F, *a b c d e f*, sont des figures semblables (342), puisqu'on peut les réduire à un même nombre de triangles, dont les homologues sont semblables (341).

PROBLEMES.

* 349. *Pour trouver une quatriéme proportionnelle à trois lignes données*, telles que A L, A B, A K, tirez deux droites indéfinies A H, A E, qui fassent un angle quelconque; prenez sur A H avec le compas les lignes A L, A K, & sur A E la ligne A B; joignez par une droite les points L, B, & par K menez la parallele K C à cette ligne, A C sera la quatriéme proportionnelle cherchée; car (329) A L : A K :: A B : A C. Fig. 8.

350. *Pour trouver une moyenne proportionnelle* A D *à deux lignes données* B D, D C, faites des deux données une droite B C; du milieu O & de l'intervalle O B, décrivez un demi-cercle B A C; du point de l'union D des données, élevez la perpendiculaire D A jusqu'à la circonférence du demi-cercle, c'est la moyenne proportionnelle cherchée; car (336) ∺ B D. D A. D C. Fig. 31.

* 351. *Pour trouver une troisiéme proportionnelle* D C *à deux lignes données* B D, D A, c'est-à-dire pour trouver une ligne qui soit le dernier terme d'une proportion continue, dont B D est le premier & D A le moyen proportionnel, faites des deux données un angle droit B D A, joignez les points B, A, & prolongez indéfiniment B D vers C; élevez sur l'extrémité A de la ligne B A une perpendiculaire A C, qui rencontrera en un point quelconque C la ligne B D prolongée, & D C sera la troisiéme proportionnelle; car (336) ∺ B D. D A. D C.

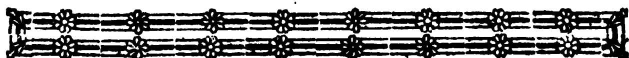
* 352. *Pour trouver une ligne* D C *qui soit à une autre ligne* D B *dans tel rapport qu'on voudra*, par exemple comme 3 est à 2, tirez deux droites indéfinies E O, I R; portez sur E O deux fois une même ouverture quelconque de compas, & portez trois fois la même ouverture sur I R; il est clair que les lignes

EO, IR feront comme 2 & 3. Cherchez enfuite une quatriéme proportionnelle (349) DC aux trois lignes EO, IR, DB; elle fera à la ligne DB, comme 3 eft à 2, ou ce qui eft la même chofe, DB : DC :: 2 : 3, puifque EO : IR :: 2 : 3, & que EO : IR :: DB : DC.

Fig. 8. * 353. *Pour divifer une ligne* AE *dans la même raifon qu'une ligne donnée* AH eft divifée, c'eft-à-dire en parties proportionnelles aux parties homologues de la ligne donnée AH, faites avec ces deux droites un angle quelconque; joignez leurs extrémités par la droite HF, & par les points de divifion I, K, L, menez à cette droite les paralleles ID, KC, LB; elles diviferont la droite AE comme on demande (328).

Fig. 32. * 354. *Enfin pour divifer une ligne donnée* AE *en moyenne & extrême raifon*, élevez fur fon extrémité E la perpendiculaire EC égale à la moitié de AE; de C comme centre & de l'intervalle CE, décrivez le cercle EDBIG; tirez par A & C la fécante AG; enfin tirez la corde GE, & par le point D fa parallele DH, vous aurez par la conftruction DG = AE; & par conféquent (339) AH fera divifée en moyenne & extrême raifon au point D. La parallele DH divifera donc dans la même raifon la ligne donnée AE (328).





LEÇON SIXIEME.

DES PLANS.

DE LA MESURE DES PLANS.

DEFINITIONS.

355. Un plan P est une surface telle qu'une ligne droite D A couchée dessus, la touche toujours par tous ses points, quoiqu'on la roule en tout sens, ensorte qu'elle acquiere successivement les positions E A, C A, &c. *Fig.* 38.

356. On appelle *plan de deux lignes* B D, C D la trace A C D B d'une de ces droites C D qui coule sur l'autre D B, en lui demeurant toujours perpendiculaire. On l'appelle aussi *rectangle de deux lignes*, lorsqu'elles sont inégales, parce qu'en effet du mouvement de C D sur D B il résulte un rectangle. On l'appelle encore le *produit de deux lignes*, parce qu'en effet le plan A C D B n'est autre chose que la ligne C D, prise autant de fois qu'il y a de points dans la ligne D B. *Fig.* 34.

357. Le plan ou le produit E C D G de deux lignes égales G D, C D, s'appelle le *quarré* d'une de ces deux lignes C D, ou G D, qu'on nomme *pouce quarré*, *pied quarré*, *toise quarrée*, *&c*. selon que la ligne C D est d'un pied, d'un pouce, ou d'une toise de longueur. En effet la trace de C D qui coule sur D G = C D, en lui demeurant toujours perpendiculaire, est une

figure dont tous les angles sont droits & les côtés égaux chacun à C D.

Les quarrés sont la mesure des surfaces; ensorte qu'on a assez déterminé l'étendue d'un champ, d'un enclos, d'un lac, &c. lorsqu'on a trouvé que sa surface est égale à celle d'un certain nombre de toises quarrées, ou de pieds quarrés.

THÉOREMES.

358. *Le produit de deux lignes divisées en mêmes mesures quelconques exprime ces mêmes mesures quarrées*; ainsi si C D est de quatre pieds & D B de huit pieds, le produit de C D par D B, ou le rectangle A C B D contiendra 4×8, ou 32 pieds quarrés; car si par les points de division de la ligne C D on mene à la ligne A B des droites paralleles à D B, & par conséquent perpendiculaires à C D, le rectangle A C D B contiendra quatre rectangles, qui auront chacun évidemment un pied de hauteur: & si par les points de division de la ligne D B, on éleve des droites paralleles à C D, & par conséquent perpendiculaires à D B, chaque petit rectangle sera partagé en huit parties rectangulaires, qui auront chacune un pied de largeur, & qui seront par conséquent des pieds quarrés: or dans quatre rectangles, composés chacun de huit pieds quarrés, il y en a 32: donc le produit d'une ligne de quatre pieds par une ligne de huit pieds contient 32 pieds quarrés. Donc, &c.

359. *Un parallelogramme quelconque est égal au produit de sa base par sa hauteur*: cela est évident pour un rectangle quelconque A C D B, qui n'est autre chose que la hauteur C D prise autant de fois qu'il y a de points dans la base B D; & tout parallelogramme étant égal à un rectangle de même base & de même hauteur (305), a la même mesure que ce rectangle.

* 360. *Scholie.* Le parallelogramme A B C D n'est autre chose que le côté B C, pris autant de fois qu'il y a de points dans la base C D, & cependant il n'est pas égal au produit de sa base par la longueur de ce côté, mais seulement par la hauteur B F, ce qui semble d'abord un paradoxe; mais il faut observer que le côté B C du parallelogramme A B C D est lui même un parallelogramme infiniment mince, de même base & de même hauteur que la perpendiculaire B F, qui est un rectangle infiniment mince; & par conséquent ces deux lignes B C, B F ont une égale surface infiniment petite (305) quoiqu'elles soient inégales en longueur, & de là vient qu'étant prises toutes les deux autant de fois qu'il y a de points dans la base D C, ou dans son égale F E, elles forment des espaces égaux A B C D, A B F E, au lieu que le produit de la base D C par une ligne de même longueur que G B, & qui fût perpendiculaire à cette base, seroit évidemment un rectangle plus grand que le parallelogramme A B C D, puisqu'ayant la même base D C, il auroit plus de hauteur. Fig. 24. ou 25.

361. *Un triangle quelconque est égal au produit de sa base par la moitié de sa hauteur; ou de sa hauteur par la moitié de sa base, ou enfin à la moitié du produit de sa base par sa hauteur*; (ces trois façons de parler reviennent au même, puisqu'en exprimant la base par b, la hauteur par h, il n'y a pas de différence entre ces trois expressions, $b \times \frac{h}{2}$, $\frac{b}{2} \times h$, $\frac{bh}{2}$), puisqu'il est la moitié d'un parallelogramme de même base & de même hauteur (303).

362. *Un polygone régulier est égal au produit de l'apothême par la moitié de son contour*; car on peut le réduire en triangles isoceles égaux en tout (312), dont la hauteur commune est l'apothême, & la somme des bases est le contour du polygone; or chacun d'eux

étant égal au produit $\frac{bh}{2}$ de l'apothême h, par la moitié $\frac{b}{2}$ de la base b (362), la somme $\frac{bh}{2} + \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2}$, &c, ou $\frac{bh + bh + bh, \&c.}{2}$ de tous ces triangles est égale au produit de l'apothême h, par la somme $\frac{b + b + b, \&c.}{2}$ de la moitié des bases, c'est-à-dire par la moitié du contour.

363. *La surface d'un cercle est égale au produit du rayon par la moitié de la circonférence* (362), puisque le cercle est un polygone régulier dont le rayon est l'apothême (319).

364. Donc *le polygone régulier est égal à un triangle qui auroit pour hauteur l'apothême du polygone, & pour base le contour entier* (361 & 362), *& le cercle est égal à un triangle qui auroit pour hauteur le rayon & la circonférence pour base* (361 & 363).

Fig. 37. * 365. *La surface d'un trapeze* CKHE *qui a deux côtés* CK, HE *paralleles, est égale au produit de la ligne* DI, *qui tient le milieu entre ces deux côtés, par la ligne* RG, *perpendiculaire à ces mêmes côtés.* Soit tirée par le point I, la parallele ZP au côté CE, le parallelogramme CEPZ, est égal au trapeze CEHK; car le pentagone CEPIK est commun à l'un & à l'autre, & les deux triangles KIZ, HIP, dont l'un appartient au parallelogramme, l'autre au trapeze, sont égaux en tout (241), à cause de IH=IK, par la supposition de IP=IZ, (puisque DI divise en deux également CE ou ZP) & des angles opposés par la pointe en I; or le parallelogramme CEPZ=EP X RG (359) ou (304) DI X RG: donc le trapeze CEHK=DIXRG.

DU RAPPORT DES SURFACES.

THÉOREMES.

366. *Les surfaces* S, *s de deux parallelogrammes sont en raison composée de leurs bases* B, *b*, *& de leurs hauteurs* H, *h*; car la raison composée de la raison $\frac{B}{b}$ des bases, & de celle des hauteurs $\frac{H}{h}$ est (122) $\frac{BH}{bh}$; or S : *s* :: BH : *bh*, puisque S = BH & *s* = *bh* (359).

367. *Deux triangles quelconques ont aussi des surfaces* S, *s*, *qui sont en raison composée de leurs bases* B, *b* *& de leurs hauteurs* H, *h*; car puisque $S = \frac{BH}{2}$ & $s = \frac{bh}{2}$ (361) on a $S : s :: \frac{BH}{2} : \frac{bh}{2}$, ou bien (116) S : *s* :: BH : *bh*.

368. *Les surfaces* S, *s de deux parallelogrammes ou de deux triangles de même base* B, *sont comme leurs hauteurs* H, *h*; *& si leur hauteur* H *est égale, leurs surfaces sont comme les bases* B, *b*, car puisque (366) S : *s* :: BH : B*h*, dans le premier cas, & que dans le second S : *s* :: BH : *b*H, on a *dividendo* (131) dans le premier cas $S : s :: \frac{BH}{B} : \frac{Bh}{B}$, ou S : *s* :: H : *h*; & dans le second cas $S : s :: \frac{BH}{H} : \frac{bH}{H}$ ou S : *s* :: B : *b*.

369. *Si deux parallelogrammes ou deux triangles* A, B *ont des bases en raison inverse des hauteurs, leurs surfaces sont égales*; car puisque la base de A est à la base de B comme la hauteur de B est à la hauteur de A, la surface de A qui est le produit des extrêmes, est égale à la surface de B qui est le produit des moyens.

370. Réciproquement *deux parallelogrammes, ou deux triangles dont les surfaces* BH, *bh* (359) ou $\frac{BH}{2}$, $\frac{bh}{2}$ (362) *sont égales, ont des bases réciproquement proportionnelles aux hauteurs*; car puisque BH = *bh*, on a (129) B : *b* :: *h* : H; & puisque $\frac{BH}{2} = \frac{bh}{2}$, on a $\frac{B}{2}$: $\frac{b}{2}$ :: *h* : H, ou (116) B : *b* :: *h* : H.

371. *Les surfaces de deux parallelogrammes semblables, ou de deux triangles semblables, sont entr'elles en raison doublée, ou comme les quarrés* (124) *de leurs hauteurs ou de leurs bases*; car dans les parallelogrammes, ou dans les triangles semblables, les raisons des bases & des hauteurs sont égales, & la raison des surfaces est composée de ces deux raisons (365), & par conséquent doublée de l'une d'elles (124).

Fig. 33. * 372. En général *les surfaces de deux figures semblables* X, x *sont en raison doublée de deux côtés homologues quelconques, & par conséquent raison doublée* (344, 133, & 113) *de deux dimensions homologues quelconques, ou des contours* (345) *des deux figures*. Les surfaces des deux triangles semblables ACB, *acb* (341) sont en raison doublée des côtés AB, *ab* (371), ou (326 & 133) des côtés CB, *cb*; pareillement les triangles semblables ACD, *acd*, ont des surfaces en raison doublée des côtés CD, *cd*, ou CB, *cb*: donc (113) les triangles ACB, *acb*, sont entr'eux comme les triangles ACD, *acd*; on prouvera de la même maniere que les triangles ACD, *acd* sont entr'eux comme les triangles AED, *aed*, & l'on formera enfin cette suite de raisons égales ACB : *acb* :: ADC : *adc* :: AED : *aed* :: AGE : *age* :: AIG : *aig*, dans laquelle la somme des antécédens ou la surface de X est à la somme des conséquens, ou à la surface

de x comme un antécédent quelconque est à son conséquent (136), par exemple, comme ACB est à acb, ou (371), comme AB^2 est à ab^2.

* 373. *Donc les surfaces de deux cercles sont en raison doublée des rayons, des diametres, des arcs semblables, de leurs soutendantes, ou des circonférences entieres* (346 & 371).

374. *Le quarré* BE *de l'hypothénuse* BC *d'un triangle rectangle* ABC, *est égal à la somme des quarrés* M, N *des deux autres côtés* AB, AC. Soit la perpendiculaire AG à l'hypothénuse BC & à sa parallele DE, le rectangle P est égal au quarré M; car (335) ÷ OB. AB. BC ou BD : donc (127) AB^2, ou M = OBXBD, ou (359) P; pour la même raison le rectangle Q est égal au quarré N : donc P+Q, ou BE = M+N. Il suit de là, Fig. 35.

375. 1°. *Que le quarré de chaque côté d'un triangle rectangle est égal au quarré de l'hypothénuse, moins le quarré de l'autre côté.*

* 376. 2°. *Que si les trois côtés d'un triangle rectangle sont des dimensions homologues, ou des côtés homologues de trois figures semblables, soit irrégulieres, soit régulieres, celle qui est formée sur l'hypothénuse, est égale à la somme des deux autres;* car ces trois figures sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés ou dimensions homologues (372), qui sont les côtés du triangle; ensorte que si la figure formée sur l'hypothénuse est double du quarré de l'hypothénuse, chaque autre figure est double du quarré formé sur le même côté : donc le quarré de l'hypothénuse étant égal à la somme des quarrés des deux autres côtés (374), la figure formée sur l'hypothénuse égalera nécessairement les deux autres.

* 377. 3°. *Que si les trois côtés d'un triangle isocele rectangle sont les côtés homologues, ou les dimensions ho-*

mologues de trois figures semblables, celle qui est formée sur l'hypothénuse est double de chacune des autres; car les quarrés des deux côtés égaux de ce triangle étant aussi égaux, & par conséquent (372), les figures formées sur ces côtés étant aussi égales, la figure formée sur l'hypothénuse qui les égale toutes deux (376), est double de chacune.

* 378. *La diagonale du quarré est incommensurable avec le côté*; car cette diagonale étant l'hypothénuse d'un triangle rectangle isocele, son quarré est double du quarré de l'un des côtés (377); donc si le quarré du côté est un quarré parfait, celui de la diagonale n'est qu'un quarré imparfait (101), c'est-à-dire un quarré dont la racine (qui est la diagonale) ne peut être exprimée par aucun nombre possible; donc la diagonale & le côté ne sont pas comme nombre à nombre, & par conséquent il n'est pas de partie de la diagonale, quelque petite qu'elle soit, qui prise un certain nombre juste de fois, mesure exactement le milieu du quarré (puisque si l'on pouvoit en trouver une, la diagonale & le côté seroient entr'eux comme le nombre de ces petites parties dont ils seroient composés), & c'est ce qu'on entend par deux *lignes incommensurables*.

PROBLEMES.

* 379. *Pour réduire une figure rectiligne quelconque*, Fig. 36. A B D D B *à une autre figure* A B D C, *qui lui soit égale en surface & qui ait un angle de moins*, tirez la ligne A D; & par le point B tirez la parallele BC à cette ligne, qui rencontrera en C le côté D D prolongé; tirez A C, vous aurez le quadrilatere A B D C égal en surface au pentagone A B D D B, car les triangles A D C, A D B de même base A D, & compris entre les mêmes paralleles A D, B C, étant égaux en sur-

face (306), si on en ôte le triangle commun A O D, resteront les triangles A O B, D O C égaux en surface, dont l'un appartient au pentagone A B D D B, l'autre au quadrilatere A B D C; donc les deux figures ayant tout le reste commun, sont égales en surface.

* 380. En opérant de même sur l'autre partie de la figure, on réduira le quadrilatere A B D C à un triangle A C C, qui lui est égal en surface; donc pour *réduire une figure rectiligne* A B D D C *à un triangle qui lui soit égal en surface*, il faut la réduire successivement à des figures qui ayent toujours un angle de moins, par la méthode du n°. 379.

381. *Pour trouver un triangle égal en surface à un polygone régulier*, faites d'une ligne égale au périmetre la base d'un triangle, qui ait pour hauteur l'apothême, vous aurez le triangle cherché (361 & 362).

382. *Pour faire un quarré* M *égal en surface à un parallelogramme donné* P, cherchez une moyenne proportionnelle (350) B A à la base B D & à la hauteur B O, son quarré M sera égal à B O X B D (127), c'est-à-dire (359) au rectangle P. Fig. 352

383. *Pour faire un quarré égal à un triangle donné*, cherchez une moyenne proportionnelle (350) à la base du triangle & à la moitié de sa hauteur, le quarré de cette ligne sera égal au triangle donné (127).

184. *Pour faire un quarré égal à un polygone régulier donné*, réduisez-le d'abord à un triangle qui lui soit égal en surface (381), & faites un quarré égal à ce triangle (383).

REMARQUE.

S'il étoit possible de trouver géométriquement une ligne exactement égale à la circonférence d'un cercle, il est évident qu'on pourroit le réduire à un

triangle qui lui seroit égal en surface ; il ne faudroit que lui donner la circonférence pour base, & le rayon pour hauteur (361 & 363). On pourroit ensuite réduire ce triangle à un quarré (382) qui lui seroit égal en surface, & qui le seroit par conséquent au cercle donné. C'est là le fameux problême de la *quadrature du cercle*, que les plus grands Géometres n'ont pu résoudre, parce qu'ils n'ont pas pu trouver un moyen géométrique d'avoir une ligne droite exactement égale à la circonférence d'un cercle.

385. Archimede a trouvé que le rapport du diametre à la circonférence d'un cercle est plus petit que celui de 7 à 21, & plus grand que celui de 7 à 22, c'est-à-dire que le diametre est moins que $\frac{7}{21}$, ou sept vingt-uniémes parties de la circonférence, & plus que $\frac{7}{22}$, ou sept vingt-deuxiémes parties ; mais il n'a pû trouver un rapport exact ; peut-être que le diametre & la circonférence sont incommensurables : d'autres ont trouvé ce rapport comme de 113 à 355, qui est plus approchant du vrai que le premier, & plusque suffisant pour la pratique, puisque dans la mesure d'une circonférence de cercle dont le diametre seroit d'une lieue & demie, il ne donne pas même l'erreur d'une ligne, quoique l'erreur soit d'autant plus grande que le diametre est long.

386. *Pour trouver la circonférence d'un cercle dont le diametre est connu*, dites comme 113 est à 355, ainsi le diametre connu est à la circonférence cherchée, qu'on connoîtra par la régle de trois (137) ; & réciproquement, *pour connoître le diametre d'un cercle dont la circonférence est donnée*, dites 355 est à 113, comme la circonférence donnée est au diametre cherché.

Fig. 33. * 387. *Etant données les surfaces* S, s *de deux figures semblables* X, x, *& la longueur de chaque côté de l'un, pour trouver en nombres la longueur de chaque côté de*

l'autre, dites (371) S : *s* :: A B² : *ab*². Connoissant dans cette proportion les trois premiers termes, je connois (137) le dernier par la régle de trois, & sa racine *ab* qui est un côté de *x*, homologue au côté AB; maintenant pour connoître en nombres la longueur des côtés *bc*, *cd*, &c. faites successivement ces proportions AB : *ab* :: BC : *bc*, BC : *bc* :: CD : *cd*, &c. dont les derniers termes sont connus par la régle de trois.

388. *Etant données deux dimensions homologues quelconques* AF, af, *ou deux côtés homologues* AB, ab *de deux figures semblables, avec la surface* S *de l'une* X, *pour trouver la surface* s *de l'autre* x, dites AF² : *af*² :: S : *s* (371) ou AB² : *ab*² :: S : *s*.

* 389. *Etant donnés tous les côtés d'une figure* X, *pour trouver les lignes qui doivent former les côtés d'un autre figure* x *semblable à la première, & pour la tracer, en supposant qu'un de ses côtés* ab *est donné*, dites AB : *ab* :: BC : *bc*, BC : *bc* :: CD : *cd*, &c. La méthode que nous avons donné de trouver une quatriéme proportionnelle (349) à trois lignes données, fera successivement trouver celles qui forment le quatriéme terme de ces proportions, après quoi il sera aisé de tracer la figure *x*, en faisant faire par ses côtés des angles égaux à ceux que comprennent les côtés homologues de X.

* 390. *Etant donnés tous les côtés d'une figure, pour en tracer une semblable, dont on ne connoît aucun côté & dont la surface ait avec la surface de la premiere un rapport tel qu'on voudra*, par exemple comme 2 est à 3. 1°. Si la figure donnée est un quarré BE, cherchez une ligne qui soit au côté connu BC, comme 2 est à 3 (352); & soit cette ligne égale à BO; cherchez ensuite une moyenne proportionnelle BA entre BC & BO; elle sera un côté du quarré cherché; car si on tire la perpendiculaire OG aux côtés BC, DE, le Fig. 35.

rectangle P & le quarré B E de même base B D, seront entr'eux comme leurs hauteurs (367) B O, B C, ou comme 2 est à 3 ; or le quarré de B A ou M est égal (127) à B O X B C, ou B D, c'est-à-dire au rectangle P (359) ; donc le quarré M est au quarré B E comme 2 est à 3.

2°. Si la figure donnée eût été toute autre qu'un quarré ; & si B C en eût été un côté, il auroit fallu opérer de même, & la figure semblable formée sur BA auroit été à la figure donnée comme 2 est à 3, parce que les figures semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. La ligne B A une fois trouvée, on peut tracer la figure entiere dont elle est un côté, par la méthode du n°. 389.

* 391. *Etant données plusieurs figures semblables ; de sorte qu'on connoisse tous les côtés de l'une d'entr'elles, & de plus un côté ou une dimension homologue dans chaque autre ; pour trouver une figure qui les égale toutes & qui leur soit semblable.*

1°. Si on ne doit trouver la somme que de deux figures, dont les côtés homologues ou les dimensions homologues sont A B, A C, faites faire à ces dimensions un angle droit B A C, & par leurs extrémités B, C, tirez B C ; ce sera le côté ou la dimension homologue de la figure cherchée (376).

2°. Si on eût donné trois figures dont les côtés ou les dimensions homologues eussent été A B, A C, C E ; après avoir trouvé la dimension homologue B C de la somme des deux premieres, il auroit fallu en former avec la dimension C E un angle droit, & tirer une ligne de B en E, ç'auroit été la dimension homologue de la figure cherchée (376) ; & cette dimension étant une fois trouvée, il eût été aisé (389) de tracer la figure entiere semblable à celle dont tous les côtés sont supposés connus de même que les angles.

* 392.

* 392. *Enfin pour trouver une figure multiple d'une autre & qui lui soit semblable.* 1°. Si l'on demande une figure double de la donnée, faites un triangle rectangle isocele; dont chacun des côtés égaux soit un même côté ou une même dimension de la figure donnée; la base de ce triangle sera le côté ou la dimension homologue d'une figure double de la donnée (377). 2°. Si on demande une figure triple de la donnée, il faudra d'abord en faire une double, ensuite chercher la somme de la figure donnée, & de la figure double de cette donnée qu'on vient de trouver; ainsi des autres.

Des différentes positions respectives de deux plans & d'une droite à l'égard d'un plan.

DEFINITIONS.

393. On appelle la ligne commune à deux plans qui se coupent, la *section* de ces plans.

394. *On dit qu'une ligne* B A *est perpendiculaire à un plan* P, *lorsqu'elle est perpendiculaire à toutes les lignes* D A, E A, C A, *qu'on peut tirer dans ce plan par le point* A *sur lequel elle tombe*; & un plan est perpendiculaire à un autre, lorsqu'une ligne tirée dans le premier plan perpendiculairement au côté qui touche le second plan est aussi perpendiculaire à ce second plan. Fig. 41.

395. On appelle *angle plan*, le plan compris entre deux droites qui font un angle, & *angle solide* une pointe solide formée par le concours de plusieurs angles plans, comme la pointe A d'une pyramide (F. 42). *Deux angles solides sont égaux lorsqu'ils sont composés d'un même nombre d'angles plans égaux chacun à chacun.*

THEOREMES.

396. *Une droite qui a deux points sur un plan est toute entiere dans ce plan*; car une droite qui seroit toute entiere dans ce plan, & qui passeroit par les deux points du plan que touche la premiere droite, se confondroit nécessairement avec elle (194).

397. *Deux plans couchés l'un sur l'autre se touchent par tous leurs points*, puisque les droites qui composent un plan touchent l'autre par tous leurs points (396).

398. *Trois points qui ne sont pas en ligne droite déterminent la position d'un plan.* Trois ou plusieurs points placés en ligne droite ne déterminent point la position d'un plan, puisque le même plan peut rouler sur une des lignes droites quelconques qui le composent; mais il n'y a qu'une position dans laquelle un plan puisse passer par trois points placés non en ligne droite.

399. *Trois points ne peuvent être communs à deux plans différens s'ils ne sont en ligne droite*; car trois points qui ne sont pas en ligne droite déterminent la position d'un plan (398).

400. *L'intersection de deux plans ne peut être qu'une ligne droite.* 1°. Elle n'est qu'une ligne, car chaque ligne d'un des plans n'a qu'un point commun avec la ligne qu'elle coupe dans l'autre plan (194). 2°. Elle est une ligne droite, puisque tous les points de la section sont communs aux deux plans, & que trois points ne peuvent être communs à deux plans différens s'ils ne sont en ligne droite (399).

401. *Deux droites qui se coupent sont dans le même plan*; car le point d'intersection de ces droites, & un point pris dans chacune déterminent la position d'un plan (398), dans lequel chaque ligne a deux points & par conséquent tous les autres (396).

402. *Une ligne droite qui en joint deux autres posées*

sur un plan, *est dans le même plan* (396), puisqu'elle touche le plan par deux de ses points, qui sont ses deux points de rencontre avec les deux autres droites.

403. *Deux lignes perpendiculaires*, *ou également inclinées du même côté sur un plan*, *sont paralleles*; car dans ce cas la ligne du plan qui passe par les deux points de rencontre de ces deux lignes, fait avec elles les angles correspondans égaux; elles sont donc paralleles (229).

404. *Réciproquement deux paralleles font avec le même plan les mêmes angles*; car elles font les mêmes angles avec la ligne du plan qui passe par leurs points de rencontre (225, 226 & 227).

405. *On ne peut du même point* A *d'un plan* P, *élever plus d'une perpendiculaire* A B *à ce plan*; car il n'y a qu'une situation dans laquelle la ligne A B penche également sur toutes les lignes imaginables D A, E A, C A, &c. qui passe par le point du plan qu'elle rencontre. Fig. 38.

406. *On ne peut pas non plus d'un point* B *hors d'un plan* P, *mener plus d'une perpendiculaire* B A *à ce plan*; car si B E étoit aussi perpendiculaire au plan P, on pourroit d'un même point B tirer deux perpendiculaires B A, B E à la ligne E A qui passe par leurs points de rencontre (394), ce qui est impossible (212).

407. *La distance d'un point* B *à un plan* P, *est mesurée par une perpendiculaire tirée de ce point sur le plan*; car elle mesure exactement la distance du point B à toutes les lignes D A, E A, C A, &c. du plan qui passent par le point de rencontre A (211 & 394).

408. *Les intersections de deux plans paralleles par un troisiéme plan*, *sont des lignes paralleles*; car si elles ne l'étoient pas, les plans dont elles font partie ne le seroient pas non plus.

* 409. *Si l'on pose sur un plan* P, *le côté* D A E *d'un* Fig. 39.

rectangle DEFC, *plié dans la direction d'une ligne* B A *perpendiculaire au côté* D E *qui touche le plan ; je dis que la ligne* B A *qui forme le pli du rectangle est perpendiculaire au plan* P ; car si l'on roule les deux côtés du rectangle autour de son pli supposé immobile, il demeurera toujours perpendiculaire aux parties AD, A E du côté D E ; or ces parties en roulant s'appliqueront successivement à toutes les lignes du plan qui passent par le point A de rencontre ; donc le pli B A du rectangle est perpendiculaire à toutes ces lignes, & par conséquent au plan (394).

Fig. 38. * 410. *Si une ligne* B A *est perpendiculaire à deux lignes* D A, E A *tirées par le point* A *du plan* P *sur lequel elle tombe, elle est perpendiculaire à ce plan.* Pour s'en convaincre il suffit de concevoir des lignes D C, E F tirées (comme dans la fig. 39) par les points D, E parallelement à B A, & égales à cette ligne ; & d'autres lignes B C, B F tirées du point B aux points C, F ; la ligne B A dans ce cas sera le pli d'un rectangle perpendiculaire aux deux parties A D, A E du côté D E posé sur le plan, & par conséquent (409) elle sera perpendiculaire à ce plan.

Fig. 39. * 411. *L'angle d'inclinaison de deux plans* B D, B E *qui se rencontrent ou qui se coupent, est mesuré par un arc dont le centre est dans la section* A B *de ces plans, & dont l'aire leur est perpendiculaire ;* car les différens degrés d'inclinaison des deux plans B D, D E que je suppose d'abord appliqués l'un à l'autre, & s'ouvrir ensuite en roulant sur la ligne B A, sont mesurés évidemment par l'arc que décrivent à la fois les points correspondans de ces plans, en se séparant & en s'éloignant de plus en plus ; & comme cet arc est formé par le mouvement de deux lignes, dont l'une est dans un plan, l'autre dans l'autre, son centre doit être dans chacune de ces lignes, & par conséquent au point de

la section où elles se rencontrent ; or l'aire de cet arc est évidemment perpendiculaire aux deux plans B D, B E ; donc, &c.

* 412. *Donc l'angle formé par deux plans* B D, B E *qui se rencontrent, est le même que celui de deux lignes* D A, E A *prises l'une dans un plan, l'autre dans l'autre, toutes les deux perpendiculaires à la section* B A *& qui aboutissent au même point ;* car l'angle de deux plans est le même que celui qui est formé par les deux rayons tirés des extrémités de l'arc qui le mesure à son centre, c'est-à-dire (411) par deux droites tirées l'une dans un plan, l'autre dans l'autre, à un même point de la section A B ; or ces rayons sont nécessairement perpendiculaires à cette section, puisqu'en roulant sur un point de la section ils ont formé un plan de cercle, & que s'ils eussent été obliques comme B E, ils auroient formé par leur mouvement une surface convexe terminée en pointe au point B.

* 413. Il suit du n°. précédent, que *la rencontre & l'intersection de deux ou de plusieurs plans, ont les mêmes propriétés* que nous avons découvertes (200, 202, 203, 204, 205, 206, 223, 224, 225, 226, 227, 228 & 229) dans *la rencontre &* dans *l'intersection de plusieurs droites.*

* 414. *Il faut au moins trois angles plans pour en former un solide ;* deux plans ne pouvant point renfermer d'espace, non plus que deux lignes.

* 415. *De plusieurs angles plans qui en forment un solide, chacun est nécessairement moindre que les autres pris ensemble ;* car sans cela on ne pourroit que les coucher tous sur le plus grand, & non en faire une pointe solide.

* 416. *La somme des angles plans qui en forment un solide, est nécessairement moindre que quatre angles droits ;* parce que quatre angles droits qui ont un

sommet commun forment un plan, & qu'on ne peut faire une pointe solide d'un plan, sans en retrancher.

* 417. *On ne peut* donc *former d'angle solide par le moyen de trois angles plans, dont chacun n'est pas moindre que* $\frac{360°}{3}$, car $\frac{3*360°}{3} = 360°$, c'est-à-dire que les trois angles ensemble vaudroient 360°, ce qui est impossible (416), *& en général on ne peut former d'angle solide par le moyen d'un nombre* n *d'angles plans, dont chacun n'est pas moindre que* $\frac{360°}{n}$.



LEÇON SEPTIEME.

DES SOLIDES.

De la formation des solides.

DÉFINITIONS.

418. UN *solide* s'appelle en général un *polyedre*. On lui donne le nom particulier de *tétraedre*, *pentaedre*, *exaedre*, *eptaedre*, *octaedre*, &c. selon qu'il a 4, 5, 6, 7, 8, &c. faces.

419. Un *polyedre régulier* est celui dont toutes les faces sont des polygones reguliers égaux, & de la même espece.

Fig. 40. 420. Si le polygone ABCDE s'éleve parallelement à lui-même, de façon que chaque point H décrive une ligne HH perpendiculaire à son plan, & s'il

s'arrête dans la situation A B C D E, sa trace sera *un solide, dont les bases sont des polygones égaux & paralleles, & dont les faces sont des rectangles. Il s'appelle un prisme droit.*

421. Si le polygone A B C D E s'éleve de façon que chacun de ses points O décrive une ligne oblique à sa surface, *le prisme est oblique*, & il *a pour faces des parallelogrammes.* Fig.

422. Le polygone A B C D E s'appelle l'*élément* de ces deux solides; les lignes H H, H O, qui passent par le milieu de tous les élémens de ces solides, en sont les *axes.* Les perpendiculaires H H, H H aux deux bases, prolongées, s'il le faut, en sont les hauteurs.

423. *Un solide n'a qu'autant d'élémens que sa hauteur a de points*; car la hauteur d'un solide, dont les bases sont paralleles, mesure la distance de ces bases; or il ne peut y avoir plus d'élémens entre ces bases qu'il n'y a de points dans leur distance.

424. Le prisme est *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *&c.* selon que son élément est un triangle, un quadrilatere, un pentagone, &c.

425. Si l'élément du prisme est un rectangle A B F E, le prisme G B est un *parallelipipede rectangle*, ou simplement un *parallelipipede*, si l'élément est un parallelogramme; & si l'élément I B F M est un quarré qui ne s'éleve qu'à une hauteur égale à un de ses côtés, le prisme L B qui en résulte est *un cube*, c'est-à-dire *un exaedre dont chaque face est un quarré.* Fig. 46.

426. *Le cylindre est un prisme dont l'élément* A C B D *est un cercle.* Fig. 45.

427. Si le polygone B C D E F s'éleve, soit par une ligne perpendiculaire ou oblique à son plan, de façon qu'à chaque pas infiniment petit, chacun de ses côtés diminue de la même quantité infiniment petite, jusqu'à ce qu'il parvienne en A, où il ne sera plus qu'un Fig. 42. & 43.

point, il eſt évident que l'eſpace balayé par chaque côté ſera un composé de lignes paralleles à la baſe & contiguës, qui décroiſſent en progreſſion arithmétique, ou (245) un triangle; la figure entiere eſt *une pyramide*, qui *peut* par conſéquent *être définie un ſolide dont l'élément eſt un polygone quelconque, & dont les faces ſont des triangles.*

428. La pyramide eſt *triangulaire*; *quadrangulaire*, *pentagonale*, *&c.* ſelon que ſon élément eſt un triangle, un quadrilatere, un pentagone, &c. La pyramide eſt *droite*, ſi ſon axe A H eſt perpendiculaire à ſa baſe; elle eſt *réguliere* ſi ſa baſe eſt un triangle régulier, & ſi de plus toutes ſes faces ſont des triangles réguliers égaux entr'eux & à la baſe (419). Une perpendiculaire tirée du ſommet ſur la baſe d'une de ſes faces, eſt appellée l'*apothême* de la pyramide.

Fig. 44. 429. *La pyramide dont l'élément* A C B D H *eſt* un polygone d'une infinité de côtés, ou *un cercle, s'appelle un cone*; la pyramide & le cone ſont *tronqués*, lorſqu'ils ſont coupés de façon que la nouvelle face Fig. 42. & 44. I K L M N ou *a c b d* eſt parallele à leur baſe. La nouvelle face formée par le plan qui coupe un ſolide, s'appelle la *ſection*.

Fig. 47. 430. Si l'on conçoit que le demi-cercle D C D, qui eſt la moitié d'un polygone régulier d'une infinité de côtés, tourne autour de ſon diametre D D, il formera par ſon mouvement *une ſphere*, qui *eſt* par conſéquent *un ſolide, dont tous les points de la ſurface ſont également éloignés du centre* I du demi-cercle générateur, qu'on appelle auſſi le centre de la ſphere.

* 431. Si des angles A, B, C, E, F que forment les côtés infiniment petits du demi-cercle générateur, on tire des perpendiculaires A G, B H, C I, E K, F L au diametre D D, 1°. chaque bande compriſe entre deux de ces lignes, forme par le mouvement du demi-

cercle générateur un cone tronqué, & le côté de cette bande en décrit la surface : donc *la sphere est un composé d'une infinité de cones tronqués, infiniment minces, dont les surfaces, prises ensemble, forment celle de la sphere.*

2°. Chaque ordonnée au demi-cercle générateur décrit un plan de cercle : donc *une sphere est aussi un amas de plans de cercle couchés les uns sur les autres, dont les diametres décroissent comme les ordonnées* contiguës du demi-cercle générateur ou d'un autre *cercle* quelconque.

432. Si l'on imagine une infinité de lignes menées du centre de la sphere à sa surface, elles ne pourront remplir toute la capacité de la sphere si elles ne vont toujours en grossissant vers la surface : donc *on peut regarder la sphere comme un composé d'une infinité de pyramides infiniment minces, dont chacune a le sommet au centre, & a pour base un point de sa surface.*

433. L'*axe* d'une sphere est une droite D D, ou C *c*, qui va d'un point de la surface à un autre, en passant par le centre ; & par conséquent *tous les axes d'une sphere sont égaux entr'eux*, puisque leurs moitiés sont égales (430).

434. On appelle *grands cercles* d'une sphere ceux qui ont pour diametres un axe de la sphere. Il peut donc y en avoir une infinité ; car on peut tirer une infinité d'axes chacun dans un plan différent ; & une infinité de cercles peuvent se croiser, ayant le même axe de la sphere pour diametre commun.

* 435. *On peut prendre la moitié d'un des grands cercles quelconque pour le demi-cercle générateur*, puisqu'ils ont tous un égal diametre & le même centre.

* 436. *La section d'une sphere par un plan est un cercle ;* car si l'on conçoit le plan d'un grand cercle parallele à la section, elle se trouvera être le plan d'un des cercles qui sont les élémens de la sphere (431).

* 437. *On ne peut former que cinq espéces de polyedres réguliers*; car 1°. on peut former un angle solide avec trois triangles équilatéraux, ce qui forme un *tétraedre*; avec quatre, ce qui forme un *octaedre*; avec cinq, ce qui forme un *icosaedre*, ou un solide à vingt faces; avec trois quarrés, ce qui forme un *exaedre*; avec trois pentagones réguliers, ce qui forme un *dodecaedre*, car l'angle à la circonférence étant dans le triangle équilatéral de 60°, dans le quarré de 90°, dans le pentagone de 108° (317), la somme des angles plans qui en forment un solide dans tous les cas dont nous venons de parler, est moindre que 360°, ce qui suffit pour faire un angle plan (416).

2°. Par la raison contraire on ne peut former d'angle solide, ni par conséquent de corps avec d'autres polygones réguliers que ceux dont nous venons de parler (417), ni avec un plus grand nombre de ceux-là. Il faudroit, pour bien comprendre ce que je dis ici des polyedres réguliers, les avoir sous les yeux, en bois ou en carton.

De la mesure des surfaces de chaque espéce de solide.

DÉFINITIONS.

438. ON appelle simplement *surface* d'un solide celle de ses faces, en exceptant celle de ses bases : celle des bases & des faces tout ensemble, s'appelle *surface totale*.

439. Un cylindre *circonscrit* à une sphere est un cylindre tel que son axe est aussi le diametre d'une sphere imaginée au dedans du cylindre, & que son

élément moyen est un des grands cercles de la sphere inscrite.

THÉOREMES.

440. *La surface d'un prisme droit, & par conséquent d'un cylindre droit (426), est égale au produit du contour de sa base par sa hauteur ;* car chaque face du prisme étant égale au produit de sa hauteur, qui est aussi celle du prisme, par sa base particuliere, la somme des surfaces de ces faces, ou la surface du prisme est égale au produit de la hauteur du prisme par la somme des bases de ses faces, ou par le contour de sa base.

441. *La surface d'une pyramide droite, & dont la base est un polygone régulier, est égale à la moitié du produit de son apothême par le contour de sa base* ; car chaque face de la pyramide étant égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur (361), qui est l'apothême (428) de la pyramide, la surface de la somme de ces faces, qui est celle de la pyramide, est égale à la moitié du produit de l'apothême par la somme des bases de toutes les faces, ou par le contour de la pyramide. Si la pyramide n'étoit pas droite, ou si sa base étoit irréguliere, ses faces n'auroient pas la même hauteur ou le même apothême. Il faudroit donc dans ce cas prendre la surface de chaque face en particulier, & en prendre la somme, pour trouver la surface de la pyramide.

442. *La surface d'un cone droit est égale à la moitié du produit du contour de sa base par une droite tirée d'un point quelconque de ce contour au sommet du cone* ; car cette droite est l'apothême du cone, qui est lui-même une pyramide droite & à base réguliere (429).

* 443. *La surface d'une pyramide tronquée droite & à base réguliere, & par conséquent d'un cone tronqué droit, est égale au produit de l'apothême restant par le contour de*

l'élément moyen; car chaque face est un trapeze qui a deux bases paralleles, & par conséquent (365), dont la surface est égale au produit du reste de l'apothême par l'élément moyen de cette face : donc la somme de ces faces est égale au produit de l'apothême restant par la somme de leurs élémens moyens, qui est le contour de l'élément moyen de la pyramide tronquée.

* 444. *La surface de la sphere est égale au produit de*
Fig. 47. *son axe* D D *par la circonférence d'un de ses grands cercles* C *c*. Il suffit pour cela de démontrer que la surface de chacun des cones tronqués infiniment minces, qui composent la sphere, comme B *b*, *c* C, est égale au produit de son axe particulier H I par la circonférence d'un grand cercle C *c*. Pour le prouver, je dis que la surface de ce cone tronqué est égale au produit de la droite B C par le contour de l'élément moyen, dont P Z est le rayon (443); or ce produit est égal au produit de l'axe H I par la circonférence du grand cercle C *c*, ce qui reste à démontrer.

Pour cela soit tirée du point B la perpendiculaire B O aux lignes P Z, C I, le triangle B O C est semblable au triangle B *u* P qui est lui-même semblable au triangle P Z I, à cause que les angles *u*, Z sont droits, & que l'angle au centre Z I P ou D I P est égal à l'angle du segment *u* P B ou R P B, puisqu'ils ont tous les deux pour mesure l'arc D A B P (259 & 267) : donc les deux triangles B O C, P Z I sont semblables : donc B C : B O :: P I : P Z. Si l'on prend P I & P Z pour les circonférences des cercles dont ils sont les rayons, la proportion subsistera toujours (347) : or dans cette proportion B C × P Z = P I × B O, c'est-à-dire que le produit de B C par le contour de l'élément moyen, dont P Z est le rayon, est égal au produit de B O ou de H I par la circonférence dont P I ou C I est le rayon, ce qui restoit à démontrer.

On prouveroit de la même maniere que la surface de chaque autre cone tronqué est égale au produit de son axe par la circonférence, dont C I est le rayon ; & comme la somme des axes de tous les cones tronqués qui composent la sphere, forment l'axe de cette sphere, il suit que la surface de la somme de ces cones ou celle de la sphere, est égale au produit de l'axe D D par la circonférence, dont C I est le rayon.

* 445. Il suit de là, 1°. *que la surface de la sphere est quadruple de celle de son grand cercle* ; car le produit du rayon de la sphere par la circonférence entiere de son grand cercle seroit double (362) de la surface de ce grand cercle : donc le produit de la circonférence d'un grand cercle par l'axe, ou la surface (444) de la sphere, est quadruple de la surface d'un grand cercle.

* 446. 2°. Que *la surface de la sphere est égale à celle du cylindre circonscrit*, puisque l'un & l'autre est le produit de leur axe commun par des circonférences égales, sçavoir l'un par celle de son grand cercle (444), l'autre par celle de sa base.

* 447. 3°. Que *la surface de la sphere est à la surface totale du cylindre circonscrit comme 2 est à 3* ; car la surface d'un cylindre étant égale à celle d'une sphere inscrite (446), elle vaut quatre fois la surface du grand cercle (445) de cette sphere ou de sa base : donc la surface totale du cylindre vaut six fois celle de sa base : donc la surface du cylindre, ou celle de la sphere inscrite est à la surface totale du même cylindre comme 4 est à 6, ou comme 2 est à 3.

* 448. 4°. *Que la surface d'une sphere est égale à celle d'un cercle dont le rayon seroit l'axe de cette sphere*, parce que ce cercle ayant un rayon double du rayon d'un grand cercle de la sphere, c'est-à-dire comme 2 à 1, auroit une surface (373) qui seroit à celle du grand cercle comme 4 à 1, ou qui en seroit quadruple &

par conséquent égale (445) à celle de la sphere.

* 449. 5°. *Que la surface d'une calotte spherique* B D b *est égale au produit de son axe particulier* H D, *par la circonférence du grand cercle* C c *de la sphere dont cette calotte fait partie : il en est de même d'une portion de sphere* C A, *a c*, *comprise entre deux plans paralleles* A *a*, C *c*; car elle est égale à la somme des surfaces des cones tronqués qui la composent.

De la mesure des solidités de chaque espece de solide.

DEFINITION.

450. LA *solidité* d'un corps est l'espace renfermé entre ses faces.

451. Un cube s'appelle *pouce cubique*, *pied cubique*, *toise cubique*, *&c.* selon que ses faces sont des pouces quarrés, des pieds quarrés, des toises quarrées, &c. *Les cubes sont la mesure des solides*, de même que les quarrés le sont des surfaces, ensorte qu'on a assez déterminé la solidité d'un corps quand on a trouvé qu'elle est égale à un certain nombre, par exemple, de pouces ou de pieds cubiques.

THÉOREMES.

452. *Le produit des mesures quarrées par les mêmes mesures en longueur exprime des cubes*; ensorte que le
Fig. 46. produit de quatre pieds quarrés par une ligne de quatre pieds est seize pieds cubiques; car supposons que la ligne A B est de quatre pieds, & le rectangle H B de quatre pieds quarrés; supposons encore que le rectangle H B se meut parallelement à lui-même le long de la ligne A B, qui lui est perpendiculaire, ensorte

que ce rectangle arrive successivement dans les positions PN, LI, TR, GA; il est clair, 1°. que la trace du rectangle mobile HB, est le parallelipipede rectangle GB. 2°. Qu'il est le produit du rectangle HB par la ligne AB: or le parallelipipede GB contient seize pieds cubiques; car lorsque le rectangle HB est parvenu en PN, si on suppose que BN est d'un pied, chaque pied quarré contenu dans HB a parcouru une ligne égale à un de ses côtés, & par conséquent a décrit un pied cube (425): donc la partie PB du solide GB contient quatre pieds cubiques; chacune des trois autres LN, TI, GR en contient quatre autres pour la même raison: donc le solide entier GB contient seize pieds cubiques: donc, &c.

453. *La solidité d'un prisme & d'un cylindre est égale au produit de sa base par sa hauteur*; car elle est précisément égale à son élément, qui est la base, pris autant de fois qu'il y a de points dans la hauteur (420, 421, 423 & 426).

454. *Des prismes, & par conséquent* (426) *des cylindres de même base & de même hauteur, sont égaux*; car ils sont nécessairement composés d'un même nombre (423) de mêmes élémens (420, 421).

455. *Pareillement des pyramides* ABCDEF, ABCDEF, *& par conséquent des cones de même base & de même hauteur sont égales*; car 1°, elles sont composées d'un même nombre d'élémens, ayant des hauteurs égales (423). 2°. Les élémens IKLMN, IKLMN de ces pyramides qui se répondent, sont égaux, puisque leurs angles homologues demeurant égaux aux angles homologues de leurs bases, demeurent égaux entr'eux chacun à chacun; que leurs côtés homologues étant les termes correspondans de deux progressions arithmétiques (245), dont le premier, le dernier terme, le nombre de tous les termes, & par conséquent la

différence regnante dans la progression sont les mêmes ; sont d'égale longueur (159), & que d'ailleurs les élémens étant en même nombre dans les deux pyramides, & formant, pris ensemble, des hauteurs égales, sont de la même épaisseur dans les deux pyramides : donc ces élémens correspondans sont egaux en solidité, & par conséquent les pyramides entieres le sont aussi.

456. *Des prismes, des pyramides, & par conséquent des cylindres & des cones de même hauteur, sont entr'eux comme leurs bases*; car si l'on divise par l'esprit en parties égales les bases inégales des deux prismes ou des deux pyramides supposées, chacune de ces parties pourra être considérée comme la base d'un prisme ou d'une pyramide, qui a la même hauteur que le solide entier ; or il est évident dans ce cas que les deux prismes ou les deux pyramides supposées, sont entr'elles comme le nombre des petits prismes égaux ou des petites pyramides égales qui les composent, & par conséquent comme leurs bases : donc, &c.

457. *Une pyramide quelconque est le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur.* Qu'on imagine un cube formé par six pyramides égales, qui ayent toutes leur sommet au centre de ce cube, & qui ayent chacune pour base une de ses faces, une de ces pyramides que j'appelle P, est évidemment la sixiéme partie de ce cube ; & si on le divise en deux également par un plan parallele à deux de ses faces, P sera le tiers de la moitié de ce cube, qui est évidemment un prisme de même base & de même hauteur que P ; je l'appellerai R : cela posé, je dis que toute autre pyramide p est aussi le tiers d'un prisme r de même base & de même hauteur ; car soient B & b les bases des pyramides P & p & des prismes R, r, & soit aussi la hauteur de P égale à celle de p, on a la proportion (456) P : p :: B : b.

B : *b*. Pareillement (456) R : *r* :: B : *b* : donc P : *p* :: R : *r*, ou (130) P : R :: *p* : *r* ; or R $= \frac{1}{3}$ P : donc *r* $= \frac{1}{3}$ *p* ; ce qu'il falloit démontrer.

458. *Donc une pyramide, & par conséquent un cone* (429), *est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur*, puisque le prisme, dont la pyramide n'est que le tiers (457), est égal à ce produit tout entier.

459. *Une sphere est égale au tiers du produit de sa surface par son rayon* ; car la somme des pyramides infiniment minces, dont la sphere est composée, qui ont leur sommet au centre, & qui ont pour base un point de sa surface (432), est égale au tiers du produit du rayon par la somme de leurs bases, puisque chacune est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur, qui est le rayon de la sphere.

* 460. On peut dire encore que *la sphere est les deux tiers du produit de son axe par la surface de son grand cercle* ; car en appellant P la sphere, S sa surface, *s* celle d'un grand cercle, R le rayon, 2 R l'axe, on aura (459) P $= \frac{RS}{3}$, ou (à cause de S $= 4s$) (445) P $= \frac{4Rs}{3} = \frac{2}{3}$ 2 R *s*.

* 461. *Une sphere est les deux tiers d'un cylindre circonscrit*, puisque ce cylindre est égal au produit de sa base par sa hauteur (453), & que la sphere inscrite n'est que les deux tiers de ce produit (439 & 460).

* 462. *La sphere est donc au cylindre circonscrit comme 2 est à 3*, ainsi que sa surface est à la surface totale du même cylindre (447).

PROBLEME.

* 462. *Pour connoître le diametre, la surface & la solidité de la terre*, il faut observer que la terre est une sphere à peu près ; que les Géographes conviennent que chaque degré d'un de ses grands cercles est de 25

lieues ; ainsi le produit de 25 par 360, qui est le nombre des degrés de tout cercle, donnera la circonférence de la terre ; c'est 9000 lieues. Pour connoître le diametre, faites cette régle de Trois (385) 21 : 7 :: 9000 : $\frac{9000 \times 7}{21} = 3000$ lieues. Pour connoître la surface, multipliez 9000 lieues, qui est la circonférence d'un grand cercle par l'axe trouvé, qui est de 3000 lieues ; le produit sera 27000000 lieues quarrées ; c'est la surface de la terre (444). Enfin pour en trouver la solidité, multipliez-en la surface trouvée par le rayon, qui est 1500 lieues, & prenez le tiers du produit (459) ; or $\frac{27000000 \times 1500}{3} = 13500000000$ lieues cubiques ; c'est la solidité de la terre.

DES SOLIDES SEMBLABLES.

DÉFINITIONS.

463. *Les corps terminés de tous côtés par des plans, sont semblables, lorsqu'ils ont un même nombre de faces, dont les homologues sont des figures semblables, & que leurs angles homologues sont égaux. Les solides qui ne sont pas terminés par des plans, comme des cylindres & des cones, doivent, pour être semblables, avoir des hauteurs proportionnelles aux rayons de leurs bases ; & s'ils sont obliques, il faut encore que leurs axes fassent avec leurs bases les mêmes angles.*

* 464. On peut concevoir deux solides semblables, comme deux amas d'un même nombre de tranches d'une épaisseur infiniment petite, mais plus grande cependant dans les tranches du plus grand solide, à

proportion de son épaisseur, dont les homologues sont semblablement posées, & sont elles-mêmes des corps semblables. En un mot, deux solides semblables ne different que par leur grandeur. *Les sphéres* étant des amas d'un même nombre de tranches circulaires semblablement posées, & dont les rayons décroissent de la même maniere (431), sont donc des corps semblables, ce qu'on verra encore démontré plus bas d'une autre façon (474).

* 465. On appelle *points homologues* dans deux solides semblables GB, *gb* des points O, *o*, soit qu'ils soient placés sur la surface, ou au dedans de ces solides, tels que des lignes OM, OI & *om*, *oi*, tirées de ces points à d'autres points homologues M, I, & *m*, *i*, pris sur les faces, fassent deux triangles semblables OMI, *omi*. Deux lignes ZS, *zs*, qui ne passent au dedans de deux solides semblables que par des points homologues, sont des *axes homologues* de ces deux solides; & deux plans qui coupent deux solides semblables, sont appellés *plans homologues*, lorsqu'ils ne sont composés que d'axes homologues, comme TSRZ, *tsrz*.

465. On appelle *produisans* d'un solide ou d'une surface, les lignes dont le produit forme le solide ou la surface.

THEOREMES.

466. *Tout solide a trois produisans*; car tout solide est le produit d'une surface par une ligne; & toute surface est le produit de deux lignes.

* 467. *Deux polyedres réguliers de la même espéce sont des solides semblables*; car étant de la même espéce, ils ont un égal nombre de faces; & les faces de l'un & de l'autre étant régulieres & de la même espéce (419), sont des figures semblables (346); enfin les angles

de chacun de ces ſolides étant faits par un même nombre d'angles plans égaux entr'eux (298), & aux angles plans qui forment les angles de l'autre ſolide, ſont égaux (395) : donc (463) deux polyedres réguliers de la même eſpéce ſont ſemblables.

* 468. *Deux plans* TSRZ, tsrz *qui paſſent par trois points homologues* S, R, O & s, r, o, *placés non en ligne droite dans deux ſolides ſemblables* GB, gb, 1°. *ne paſſent que par des points homologues ;* car que deux plans qui ne paſſent que par des points homologues coupent les deux ſolides GB, *gb*, & que l'un paſſe par les points S, R, O, l'autre paſſera par les points *s*, *r*, *o* ; or le premier de ces plans ſe confondra avec TSRZ, l'autre avec *tsrz*, puiſque trois points qui ne ſont pas placés en ligne droite, déterminent la poſition d'un plan.

2°. *Séparent des tranches homologues*, puiſque s'ils ſéparoient des tranches non homologues, ils ne paſſeroient pas tous les deux uniquement par des points homologues.

3°. *Diviſent ces deux ſolides, de façon que les ſections ſont des figures ſemblables*, puiſque les ſections ſont les faces homologues des tranches homologues que ſéparent les deux plans ; & que les tranches homologues étant des corps ſemblables (464), leurs faces homologues ſont des figures ſemblables (463).

4°. *Diviſent ces ſolides en parties, dont les homologues* TB, tb, *ſont des corps ſemblables ;* car puiſqu'ils ſéparent des tranches homologues, ils en laiſſent un égal nombre dans les parties ſemblables TB, *tb*, ou TA, *ta* ; & les tranches homologues de ces parties ſont ſemblablement poſées, puiſqu'elles l'étoient avant la diviſion dans les tous ſemblables GB, *gb* (464).

* 469. *Les dimenſions homologues quelconques de deux ſpheres ſont proportionnelles entr'elles.*

1°. Les dimenſions homologues de deux grands cercles, ou de deux petits cercles homologues, dont les deux ſpheres ſont compoſées, ſont proportionnelles entr'elles (347), puiſque les cercles ſont des figures ſemblables (346).

2°. Deux dimenſions homologues priſes dans deux petits cercles homologues quelconques de deux ſpheres, ſont proportionnelles à deux autres dimenſions homologues priſes dans les grands cercles de ces mêmes ſpheres; car elles ſont proportionnelles aux rayons de ces petits cercles, qui, étant des cordes homologues des demi-cercles générateurs des deux ſpheres (431), ſont proportionnels aux rayons de ces deux cercles (347), ou des deux ſpheres, & par conſéquent (347) aux autres dimenſions homologues de ces grands cercles.

3°. Deux dimenſions homologues priſes dans deux petits cercles homologues de deux ſpheres, ſont proportionnelles aux dimenſions homologues priſes dans deux autres petits cercles homologues quelconques des mêmes ſpheres, puiſque les dimenſions des deux premiers cercles, comme des deux derniers, ſont proportionnelles aux mêmes dimenſions homologues, aux rayons, par exemple, des grands cercles de ces deux ſpheres: or les dimenſions homologues de deux ſpheres ne ſont que les dimenſions homologues de leurs grands cercles, ou de leurs petits cercles homologues. Donc, &c.

* 470. *Les dimenſions homologues quelconques de deux ſolides ſemblables* G B, g b, *ſont proportionnelles à leurs côtés homologues quelconques* D A, *d a*, ou D C, *d c*, &c.; & par conſéquent (113) elles ſont proportionnelles *entr'elles.*

1°. Cela eſt évident ſi les dimenſions homologues ſont tirées ſur leurs faces homologues (347), qui ſont des figures ſemblables (463): telles ſont les dimenſions S R, *s r*, ou T S, *t s*, &c.

2°. Si les dimensions homologues sont des axes homologues, comme SZ, *sz*, on trouvera de même que SZ : *sz* :: DC : *dc* :: DA : *da* :: &c.; car qu'outre les points S, Z, & *s*, *z* qui font des points homologues, on prenne dans chaque solide un troisiéme point homologue R & *r*, & qu'on imagine que dans chaque solide un plan TSRZ, *tsrz* passe par ces trois points; les sections seront des figures semblables (468), les lignes SZ, *sz* seront des dimensions homologues de ces sections (340), & par conséquent (347) proportionnelles aux côtés homologues SR, *sr* de ces sections, qui étant eux-mêmes des dimensions homologues (340) des faces homologues DB, *db*, sont proportionnelles (347) aux côtés DC, *dc* ou DA, *da*, &c. de ces solides : donc les axes homologues SZ, *sz* leur sont aussi proportionnels (113).

Fig. 42. 3°. Il en est de même des hauteurs de deux solides semblables & obliques, par exemple des hauteurs AQ, AH des pyramides semblables AIKLMN, ABCDEF, que je suppose se pénétrer. (Si les solides semblables sont droits, leurs hauteurs sont des axes homologues, dont on vient de démontrer la proportionalité avec deux de leurs côtés homologues quelconques). Pour le prouver il suffit d'observer que les triangles AQI, AHB sont semblables (246) : donc (329) AQ : AH :: AI : AB :: AL : AD :: LK : DC :: &c. Or les dimensions homologues de deux solides semblables ne sont que des dimensions homologues de leurs faces homologues, ou des axes homologues, ou leurs hauteurs. Donc, &c.

* 471. *Les surfaces, ainsi que les solidités de deux solides de la même espéce, sont en raison composée de leurs produisans*; car elles sont entr'elles comme les produits de leurs produisans (465); or la raison de ces deux

produits est composée des raisons de leurs produisans (124).

* 472. *Les surfaces de deux solides semblables sont en raison doublée, & les solidités en raison triplée de deux de leurs produisans homologues, & par conséquent* (470 & 133) *de deux autres dimensions homologues quelconques*; car 1°. toute surface a deux produisans (356), & tout solide en a trois (466) : 2°. les surfaces, ainsi que les solidités de deux solides semblables, sont en raison composée de leurs produisans (471) : 3°. les raisons des produisans homologues des surfaces ou des solidités des corps semblables sont égales (470) : or la raison composée de deux raisons égales est doublée, & la raison composée de trois raisons égales est triplée de l'une d'elles (124). Donc, &c.

* 473. *Les surfaces de deux spheres sont en raison doublée, & leurs solidités en raison triplée de leurs produisans, & par conséquent* (469 & 133) *de deux autres dimensions homologues quelconques*; car les surfaces de deux spheres sont en raison composée (471) de leurs deux produisans, sçavoir (444) de leurs axes, & des circonférences de leurs grands cercles; & leurs solidités sont en raison composée (471) de leurs trois produisans, sçavoir (459) des deux produisans de leurs surfaces & du tiers de leurs rayons; & comme les raisons de ces produisans homologues sont égales (469 ou 464 & 470), la raison composée de deux de ses produisans est doublée, celle de tous les trois est triplée (124) de l'une de ces raisons. Donc, &c.

* 474. Donc *les spheres* ayant les propriétés des corps semblables (469 & 473), *sont* en effet *des solides semblables*.

* 475. *De deux solides semblables, le plus petit a plus de surface que le plus grand à proportion de sa masse*; car dans les solides semblables, les solidités sont comme

les cubes de leurs dimensions homologues, & leurs surfaces ne sont que comme les quarrés de ces mêmes dimensions; ainsi les dimensions de deux solides semblables étant comme 1 à 2, leurs surfaces sont comme 1 à 4, leurs solidités comme 1 à 8, c'est-à-dire que le solide, qui a huit fois moins de solidité que son semblable, n'a que quatre fois moins de surface.

PROBLEMES.

* 476. Pour *déterminer la grandeur du soleil*, il ne faut que connoître le rapport des diametres de la terre & du soleil, & l'élever à son cube; ce sera le rapport de la terre au soleil (473), qui suffit, la grandeur de la terre étant connue (462), pour faire connoître la grandeur du soleil. Ainsi le rapport du diametre de la terre à celui du soleil étant celui de 1 à 100, les solidités seront comme 1 à 1000000 (473), c'est-à-dire que le soleil est un million de fois plus grand que la terre.

* 477. Pour *trouver combien un pied cubique contient de pouces cubiques*, il faut remarquer que la hauteur du pied est à celle du pouce, comme 12 est à 1; & par conséquent (472) le pied cubique est au pouce cubique, comme 1728 est à 1, c'est-à-dire que le pied cubique contient 1728 pouces cubiques.

* 478. *Étant donnée la dimension* d *d'un corps, dont la solidité* s *est connue, pour trouver la dimension homologue d'un corps semblable, qui ait une solidité donnée* S, dites $s : S :: d^3 : X$; la racine cubique du terme trouvé X sera la dimension cherchée (462). On auroit pû encore dire $\sqrt[3]{s} : \sqrt[3]{S} :: d : X$; & X auroit été la dimension cherchée.



LEÇON HUITIE'ME.

De la Trigonometrie rectiligne.

NOTIONS PRELIMINAIRES.

DEFINITIONS.

479. La *Trigonometrie* est l'art de résoudre ce problême général : *des trois angles & des trois côtés d'un triangle, trois choses étant données, du nombre desquelles soit un côté, trouver le reste.*

480. Soit l'angle BDC au centre d'un cercle, & interceptant l'arc BC entre ses côtés ; l'angle ADB, qui fait avec lui un angle droit ADC, est son *complément*. La ligne BG tirée de l'extrêmité B de l'arc BC perpendiculairement au rayon DC, qui aboutit à l'autre extrêmité C du même arc, est le *sinus* de cet arc, ou de l'angle BDC, qui a cet arc pour mesure. BI perpendiculaire au rayon AD, est le *sinus du complément* ADB, ou le *cosinus* (il faut remarquer qu'à cause du rectangle IG, on peut prendre DG pour BI, c'est-à-dire que *la partie du rayon comprise entre le centre & le sinus d'un arc, est le cosinus de cet arc*). CK est la *tangente* de l'angle BDC, ou de l'arc BC ; DK en est la *sécante*. AL & DL sont la tangente & la sécante du complément, ou plus brievement la *cotangente* & la *cosécante*. CG est le *sinus verse* de l'arc BC, ou de l'angle BDC. Fig. 48.

AI est le sinus verse du complément, ou le *cosinus verse.*

481. Le *sinus, la tangente, la sécante d'un angle obtus* BDF *sont les mêmes que pour son supplément* BDC; car BG étant la seule perpendiculaire qu'on puisse tirer du point B au rayon DF prolongé, est (480) le sinus de l'angle FDB, ou de l'arc FAB, & par conséquent CK est la tangente, DK la sécante du même arc FAB, ou du même angle FDB, car le sinus BG détermine tout le reste.

482. *Un angle droit* ADC *a pour sinus le rayon même* AD, cela est clair par la définition du sinus. On l'appelle sinus total; *la sécante* AD *& la tangente* CK, *d'un angle droit* ADC étant paralleles, ne concourent jamais, & *sont infinies.*

THÉOREMES.

483. *Le sinus* BI *d'un arc* AB *est la moitié de la corde* BE *qui soutend un arc double* BAE; car cette corde étant perpendiculaire au rayon AD, est divisée par ce rayon en deux également (278).

484. *Les sinus croissent à mesure que les angles croissent jusqu'à 90°; ils décroissent ensuite de la même maniere depuis 90° jusqu'à 180°, ensorte que le plus grand de tous est le sinus total;* car 1°. à mesure que les angles, & par conséquent leurs arcs croissent, les cordes du double de ces arcs, dont les sinus sont les moitiés (483), croissent aussi (274). 2°. Le sinus total est la moitié du diametre (482), qui est de toutes les cordes la plus grande (285). 3°. Les sinus des angles obtus sont les mêmes que ceux de leurs supplémens (481): donc, &c.

485. Scholie. *On ne peut cependant pas dire que les sinus croissent en même proportion que leurs angles*

ou que leurs arcs; car la corde de 60°, qui ne sont que le tiers de 180°, est égale à la moitié du diametre (318) qui est la corde de 180° : donc les sinus de 30° & de 90°, qui sont les moitiés de ces cordes, ne sont pas non plus proportionnels à leurs arcs, ni par conséquent à leurs angles.

486. *Le sinus de 30° est égal à la moitié du rayon*; puisqu'il est la moitié (483) de la corde de 60°, qui est égale au rayon (318).

REMARQUE.

487. Si les côtés d'un triangle étoient entr'eux comme les angles qui leur sont opposés, il ne faudroit, pour trouver les deux côtés d'un triangle, dont on connoîtroit le troisieme côté & les angles, que faire cette regle de Trois : un des angles connu est à son côté opposé connu, comme un autre angle connu est à son côté opposé cherché. On trouveroit de la même façon l'autre côté inconnu ; mais les côtés d'un triangle n'étant autre chose que les cordes d'un cercle où on l'auroit inscrit, il est clair qu'ils ne sont pas proportionnels aux angles qui leur sont opposés (485) : il a donc fallu substituer aux angles des quantités connues & proportionnelles aux côtés du triangle, ce sont les sinus de tous les angles possibles, qui par leur analogie avec les côtés, en font connoître la valeur. Nous allons établir cette analogie.

488. *Dans tout triangle les sinus des angles sont comme les côtés opposés à ces angles*; car tout triangle peut être supposé inscrit dans un cercle (273). Dans ce cas, chaque côté soutend un arc double de celui qui mesure l'angle opposé (266), & la moitié de chaque côté est le sinus de l'arc (483) qui mesure

l'angle opposé, ou le sinus de cet angle même; or les moitiés sont entr'elles comme les tous: donc, &c.

489. *Scholie.* Après la découverte de cette proportion, il ne s'agit plus que de trouver la valeur des sinus de tous les angles possibles, & l'on résoudra aisément le problême général énoncé ci-dessus (479). D'habiles Géometres ayant supposé le rayon d'un cercle petit ou grand, divisé en 100000 ou 1000000 parties égales, ont trouvé de combien de ces parties étoient composés les sinus de tous les angles, depuis une minute jusqu'à 90°, & ils ont construit des tables qui contiennent les valeurs de tous ces sinus. Voici sur quels principes on pourroit les construire.

Principes pour la construction des Tables des sinus & des tangentes.

THÉOREMES.

Fig. 48. * 490. CONNOISSANT *pour un arc quelconque* BC *une de ces quatre choses, son sinus* BG, *son cosinus* BI *ou* DG, *son sinus verse* CG, *son cosinus verse* AI, *on connoît les trois autres*, c'est-à-dire qu'on sçait combien elles contiennent chacune de parties du rayon, qu'on suppose divisé en 100000 ou 1000000 parties égales.

1°. Soit BG connu; on a $\overline{DG}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BG}^2$ (375), ou $DG = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BG}^2}$, $CG = DC - DG$, $AI = AD - BG$.

2°. Soit CG connu; on a $DG = DC - CG$,

$\overline{BG}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DG}^2$, ou $BG = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{DG}^2}$, $AI = AD - BG$. On trouvera de la même maniere la valeur des mêmes lignes, si DG ou AI est la donnée.

* 491. *Étant connu le sinus* CF *d'un arc* CB, *on connoît le sinus* AE *d'un arc double* ABC; car CF donne son double CA (483), & son cosinus DF (490); or à cause des triangles rectangles semblables AEC, DFC, on a DC : DF :: AC : AE. Fig. 49.

* 492. *Étant donné le sinus* AE *d'un arc* ABC, *on connoît le sinus* CF *d'un arc soudouble* BC; car AE donne EC (490), & l'on a (374) $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2$, ou $AC = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EC}^2}$, ou enfin $CF = \frac{1}{2}(\sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EC}^2}$.

* 493. *Étant donnés les sinus* LO, GI, *de deux arcs, on connoît le sinus* GH *de la somme* GLQ *de ces arcs.* Soient menées du point I les perpendiculaires IP, IK; les triangles rectangles LOD, IKD seront semblables, & l'on connoîtra PH par cette proportion, LD : OD :: LO : IK = PH; & les triangles rectangles GIP, IPR, RDH, LDO étant semblables, on a LD : OD :: GI : GP. Voilà donc PH + GP, c'est-à-dire GH connu.

* 494. On connoît le sinus de 30° (486); on connoîtra donc, si l'on veut (492), le sinus de 15°, de $\frac{15^\circ}{2}$, de $\frac{15^\circ}{4}$, de $\frac{15^\circ}{8}$, de $\frac{15^\circ}{16}$, de $\frac{15^\circ}{32}$, $= \frac{900'}{32} = \frac{54000''}{32} = 1687''\ 30''' = 101250''''$; & comme les arcs moindres que ce dernier sont extrêmement petits, on peut les prendre, sans erreur sensible, pour des lignes droites qui font le même angle avec l'extrémité du rayon, & qui font avec leurs sinus & l'extrémité du rayon, des triangles rectangles semblables; d'où il suit que ces

petits arcs sont proportionnels à leurs sinus ; on aura donc le sinus d'un angle d'une minute ou de 60'', ou, ce qui revient au même, de 3600''' par cette régle de Trois : 101250''' sont à 3600''', comme le sinus connu de 101250''' est au sinus cherché de 3600''', lequel servira à faire connoître par de simples régles de Trois tous les sinus, depuis une minute jusqu'à un degré.

* 495. Connoissant le sinus d'un degré, on connoît les sinus de 2°, de 4°, de 8°, de 16°, &c. parce qu'étant connu le sinus d'un arc, on connoît le sinus (491) d'un arc double. On connoît aussi le sinus de 3°, de 5°, de 7°, &c. parce qu'étant connus les sinus de deux arcs, on connoît le sinus de leur somme (493). On connoîtra donc aussi (491) les sinus de 6°, de 12°, de 24°, comme aussi les sinus de 10°, de 20°, de 40°, &c. & ceux de 14°, de 28°, de 56°, &c. enfin les sinus de tous les arcs, depuis une minute jusqu'à 45 degrés.

Pour trouver les sinus des arcs composés de degrés & de minutes, il ne faudra que chercher le sinus de la somme de deux arcs, dont l'un contient les degrés & l'autre les minutes (493).

Les sinus des arcs, depuis 45° jusqu'à 90°, n'étant que les cosinus des arcs qui sont depuis une minute jusqu'à 45°, à mesure qu'on connoissoit ceux-ci, on a pû connoître (490) les autres.

Enfin les angles obtus n'ayant d'autres sinus que ceux de leurs supplémens, il s'ensuit qu'on connoît les sinus de tous les arcs, depuis une minute jusqu'à 180°. Voilà la méthode qu'on peut suivre dans la construction des tables des sinus.

* 496. La connoissance des sinus ne suffit pas pour tous les calculs trigonométriques. Nous verrons dans la suite (507) qu'il est nécessaire aussi de sçavoir combien de parties du rayon contient chaque tangente ;

c'est pour cela qu'on a construit des tables des tangentes, & même des sécantes de tous les arcs possibles ; nous ne nous servirons point de ces dernieres. Voici deux théorêmes qui ont servi de fondement à la construction des tables des tangentes.

* 497. *Le cosinus* B I *ou* D G *d'un arc* B C *est au sinus* B G *de cet arc comme le rayon* D C *est à la tangente* C K *du même arc* B C ; car les deux triangles D G B, D C K sont semblables. Fig. 48.

Donc en multipliant le rayon par B G, & en divisant le produit par B I, je connoîtrai C K, & en général je connoîtrai successivement toutes les tangentes des arcs compris entre une minute & 45°, en multipliant leurs sinus par le rayon, & en divisant le produit par leurs cosinus.

* 498. *Le rayon est moyen proportionnel entre la tangente* C K *d'un arc & la cotangente* A L *du même arc* ; car les deux triangles rectangles (254) D C K, D A L sont semblables, à cause que leurs angles alternes B D G, A L D sont égaux (223 & 225) : donc C K : D C : : D A : A L, ou ÷ C K . D C . A L.

Donc en divisant le quarré du rayon par la tangente connue (498) C K ; je connoîtrai la cotangente A L, & en général je connoîtrai toutes les cotangentes des arcs compris entre une minute & 45°, c'est-à-dire toutes les tangentes des arcs qui sont au-dessus de 45° jusqu'à 90°, en divisant le quarré du rayon successivement par toutes les tangentes des arcs compris entre une minute & 45° : cela posé, on va résoudre le problême général de la Trigonométrie d'abord sur les triangles rectangles, ensuite sur les obliquangles.



Résolution du problême général sur les triangles rectangles.

Fig. 48. 499. E*TANT donnés dans un triangle rectangle* B D G *deux côtés quelconques* (l'angle droit est toujours connu), *on connoît tout le reste.*

1°. On connoît le troisiéme côté. Si B D est inconnu, on aura $\overline{BD}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{DG}^2$ (374). Si D G est inconnu, on aura (375) $\overline{DG}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{BG}^2$. Enfin si c'est B G qu'on ne connoît pas, on aura $\overline{BG}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{DG}^2$; or connoissant le quarré d'un côté, on connoît le côté même.

2°. On connoît les deux angles aigus B, D. Pour connoître l'angle B, il suffit de dire (488) le côté B D est au sinus de l'angle droit G, comme le côté connu D G est au sinus de l'angle B que je cherche (nous mettrons dans la suite *s* devant la lettre qui désigne un angle, pour en marquer le sinus). J'exprime ainsi cette proportion, B D : *s*G : : D G : *s* B. Si on cherche dans les tables le sinus trouvé, on y verra de combien de degrés est l'angle auquel il répond ; ce sera la valeur de l'angle B. Connoissant l'angle B & l'angle droit, je connois le troisiéme angle D (265).

500. *Étant donné un angle aigu* D, *& un des trois côtés quelconque, on connoît tout le reste.*

1°. On connoît les angles ; car connoissant l'angle droit & l'angle donné D, on connoît (265) le troisiéme angle B.

2°. On connoît les deux autres côtés. Si l'hypoténuse B D est donnée, on connoîtra le côté D G par cette régle de Trois (488), *s*G : BD : : *s*B : D G ; & deux côtés étant connus, on connoît le troisiéme B G, qu'on

qu'on pourroit d'ailleurs connoître par cette régle de Trois, *s*G : BD :: *s*D : BG. On connoîtroit par de pareilles proportions les deux autres côtés, si BG ou DG étoient donnés au lieu de BD.

Résolution du problême général sur les triangles obliquangles.

501. D*ans tout triangle obliquangle* ABC, *étant connu un côté quelconque* BC, *& deux angles quelconques, on connoît tout le reste;* car on connoît le troisiéme angle (265). On connoît ensuite les deux autres côtés AB, AC par ces régles de Trois, *s*A : BC :: *s*C : AB, & *s*A : BC :: *s*B : AC (488). Fig. 501

502. *Étant donnés deux côtés* AB, AC, *& un angle* B *opposé à un côté connu* AC, *on connoît tout le reste, pourvû qu'on sçache si l'angle opposé à l'autre côté connu* AB *est aigu ou obtus.* Il suffit pour cela de faire cette régle de Trois (488), AC : *s*B :: AB : *s*C. Le sinus de l'angle C étant connu, je trouverai dans les tables la valeur de l'angle C, auquel répond ce sinus; & l'angle C étant connu, on connoît tout le reste (501).

J'ai dit, pourvû qu'on connoisse si l'angle C est aigu ou obtus; car si l'on prend AC pour rayon du cercle CDI, on aura AD = AC, & l'on aura pareillement pour le triangle ABD la proportion AD ou AC : *s*B :: AB : *s*D; & par conséquent on trouvera le même sinus pour l'angle obtus D & pour l'angle aigu C, (ce qui doit nécessairement arriver, puisque l'angle ADC, supplément de l'angle ADB étant égal à l'angle ACD (243), à cause du triangle isocele DAC, l'angle ACD est aussi supplément de l'angle obtus ADB, & que les angles obtus n'ont d'autres

sinus que ceux de leurs supplémens) (481) ; si donc on vouloit connoître le côté B C du triangle A B C, & qu'on prît le sinus trouvé pour celui de l'angle obtus D, on trouveroit l'angle A beaucoup plus aigu qu'il ne l'est, & le calcul ne donneroit que B D au lieu de B C pour le côté opposé à l'angle A, ce qui seroit une erreur considérable.

* 503. *Étant connus les trois côtés, on connoît les trois angles.* Pour le démontrer, nous ferons précéder la démonstration de la proposition suivante.

* 504. LEMME. *Dans tout triangle* A B C, *le plus grand côté* B C *est à la somme des deux autres, comme leur différence est à la différence des segmens* B G, C G, *formés par la perpendiculaire* A G, *tirée sur le grand côté* B C *de l'angle opposé* A ; car si du point A, & de l'intervalle A C, on décrit le cercle F C D I, & si l'on prolonge B A en F, B F sera la somme des côtés B A, A C, & B I en sera la différence. B D sera la différence des segmens B G, C G, à cause de G D = C G (278) ; or (337) B C : B F : : B I : B D. Donc, &c.

Cela posé, on connoîtra la valeur du grand segment, en ajoutant la moitié de la différence de ces segmens à la moitié de leur somme ; & le plus petit, en retranchant de la moitié de leur somme la moitié de leur différence (177). On aura donc deux triangles rectangles B A G, C A G, dont on connoîtra deux côtés, outre l'angle droit G, & par conséquent (499) les angles B, C, ensuite tout le triangle A B C (501).

* 505. On peut démontrer aux yeux, comme nous l'avons fait par le calcul (177) que *de deux lignes inégales la plus grande est égale à la moitié de ces lignes plus la moitié de leur différence, & la plus petite à la moitié de leur somme moins la moitié de leur différence* ; nous allons le prouver, pour ne laisser aucun doute dans la démonstration précédente. Soient A D, D E deux li-

gnes inégales, dont la somme est A E; & soit A C la moitié de cette somme; je prens sur A C avec le compas A B = D E. Il est clair 1°. que B D est la différence des lignes A B = D E & A D: 2°. que B C ou C D est la moitié de cette différence, puisqu'ayant par la construction A C = E C, & A B = E D, il reste (6) B C = C D; or il est évident que A D = A C + C D, & que D E = C E − C D. Donc, &c.

* 506. *Étant connus deux côtés* A B, A C *& l'angle compris* A, *on connoît tout le reste.* Pour le démontrer, nous commencerons par établir le lemme suivant. Fig. 512.

* 507. LEMME. *Dans tout triangle* A B C *la somme de deux côtés* A B, A C *est à leur différence comme la tangente de la moitié de la somme des angles* B, C *opposés à ces deux côtés est à la tangente de la moitié de la différence de ces deux angles.* Du point A & de l'intervalle A C, décrivez le cercle D C F, prolongez B A des deux côtés jusqu'à la circonférence, prolongez C B en F, tirez H C, D C qui feront un angle droit (268), tirez la droite I H parallele à D C, & par conséquent (223) perpendiculaire à H C; vous aurez deux triangles semblables D B C, H B I, puisque l'angle H B I est égal à son opposé par la pointe D B C, & que l'angle I H B est égal à son alterne C D B: donc B D: B H :: D C: I H.

Il ne s'agit plus que de prouver 1°. que B D est la somme des côtés A B, A C: 2°. que B H en est la différence (ces deux points sont évidens par la construction): 3°. que D C est la tangente de la moitié de la somme des angles B, C: 4°. que I H est la tangente de la moitié de la différence de ces angles, ce qui se démontre ainsi.

L'angle D A C extérieur au triangle B A C est égal à la somme (237) des angles intérieurs B, C, l'angle inscrit D H C, est égal à la moitié (266) de cette

ſomme ; or ſi du point H, comme centre, & de l'intervalle HC on décrit l'arc CE, la ligne DC ſera (à cauſe de l'angle droit DCH) la tangente de l'arc CE, ou de l'angle DHC : elle ſera donc la tangente de la moitié de la ſomme des angles B, C.

Maintenant l'angle ABC extérieur au triangle HBC eſt égal à la ſomme des intérieurs BHC, BCH, c'eſt-à-dire ABC = BHC + BCH ; mais à cauſe du triangle iſocele HAC, l'angle BHC = ACB + BCH : donc en ſubſtituant ces deux derniers angles à l'angle BHC dans la premiere équation, elle ſe réduira à celle-ci, ABC = ACB + 2BCH : donc 2BCH eſt la différence des angles ABC & ACB, & BCH eſt la moitié de cette différence ; or ſi du point C, comme centre, & de l'intervalle CH, on décrit l'arc HG, la ligne IH ſera (à cauſe de l'angle droit IHC) la tangente de l'angle BCH : elle ſera donc la tangente de la moitié de la différence des angles B, C ; ce qui reſtoit à démontrer.

Cela poſé, cette tangente cherchée dans les tables ſera connoître l'angle égal à la moitié de la différence des angles B, C, auquel elle répond ; & cet angle ajouté, ou ſouſtrait de la moitié de la ſomme des angles B, C, donnera le plus grand ou le plus petit (177) angle : on connoîtra donc dans le triangle ABC trois angles & deux côtés, & par conſéquent le troiſiéme côté BC, par cette proportion *s* B : AC : : *s* A : BC.

508. Donc ſi *des ſix parties d'un triangle, ſoit rectangle* (499 & 500), *ſoit obliquangle* (501, 502, 503, & 506), *on en connoît trois, du nombre deſquelles ſoit un côté, on connoît tout le reſte* ; & le problême général eſt réſolu.

509. J'ai dit du nombre deſquelles ſoit un côté. La raiſon de cette condition eſt que *la connoiſſance des trois*

angles d'un triangle ne donne point la valeur absolue des côtés, puisque les triangles semblables ont leurs angles homologues égaux, & non leurs côtés homologues. *Mais* si on suppose une valeur à un côté, on trouvera (329) qu'elle seroit, dans cette supposition, la valeur des autres côtés, c'est-à-dire qu'on trouvera *seulement le rapport des côtés* véritables.

Il nous reste d'appliquer la solution générale du problême qui fait l'objet de la Trigonométrie à des problêmes particuliers. Nous allons proposer les plus curieux de la Trigonométrie & de la Planimétrie.

PROBLEMES DE TRIGONOMÉTRIE & de Planimétrie.

510. POUR *connoître la hauteur* A B *d'une tour*, *d'un clocher*, *d'un arbre*, &c. *accessible par le bas*, mesurez la longueur C B ; prenez en C avec le graphometre l'angle A C B (le graphometre est un demi-cercle de laiton, divisé en degrés, terminé par un diametre immobile, qui est une lunette avec laquelle on vise l'objet que l'on veut. A son centre est fixé un second diametre ; c'est aussi une lunette, qui roule aisément sur le centre du demi-cercle, on l'appelle l'*alilade*. L'arc du demi-cercle compris entre ces deux diametres, mesure l'angle fait entr'eux, & par conséquent fait par des lignes tirées de l'intersection des diametres aux deux objets visés. Dans ce cas-ci, le centre du graphometre est en C, le diametre immobile est dans la direction C B perpendiculaire à la hauteur A B, l'alilade est dans la direction C A, l'arc du graphometre, compris entre les deux lunettes, mesure l'angle B C A). Vous connoîtrez donc dans le triangle A C B, outre Fig. 52.

l'angle droit B, l'angle C, & le côté mesuré C B : donc vous connoîtrez la hauteur A B (500) par cette proportion *s* A : C B : : *s* C : A B.

511. La hauteur A B est-elle inaccessible, de façon qu'on ne puisse pas en approcher de plus près que du point C ? Mesurez la longueur D C, prenez en D avec le graphometre l'angle A D C, prenez en C les deux angles D C A, A C B ; connoissant les deux angles D, C & le côté D C dans le triangle D C A, vous connoissez le côté A C (501) : donc vous connoissez dans le triangle rectangle A C B, outre l'angle droit, le côté A C & l'angle C, & par conséquent (500) la hauteur A B. Par cette proportion *s* B : A C : : *s* C : A B.

Fig. 53. 512. Pour *connoître la distance de deux objets* A, B, *dont il n'y en a qu'un d'accessible*, la distance par exemple des bords, ou la largeur d'une riviere ; mesurez la longueur A D, & prenez les deux angles B A D, A D B, vous connoîtrez la distance A B (501).

*513. Les objets A, B, dont il faut connoître la distance, sont-ils inaccessibles tous les deux ? Mesurez la longueur D C, prenez en D les angles A D C, B D C, prenez en C les angles B C A, A C D, B C D ; vous connoissez dans le triangle A C D les deux angles A D C, A C D & le côté D C, & par conséquent (501) le côté A C : vous connoissez dans le triangle B C D les angles B C D, B D C & le côté D C, & par conséquent le côté C B : donc vous connoissez dans le triangle A C B les côtés C A, C B, & l'angle compris A C B, & par conséquent le côté A B (506).

514. Pour *connoître la distance de la lune à la terre*,
Fig. 54. on peut s'y prendre ainsi. Soit T la terre, L la lune, dans le tems qu'elle répond à l'équateur de la terre ; O un lieu quelconque de la terre, où se trouve un Observateur, Paris par exemple ; l'arc de méridien A O, compris entre l'équateur de la terre & Paris, en mar-

quera la latitude. Soit enfin C B une tangente de ce méridien au point O. Que l'Observateur prenne l'angle B O L dans le tems du passage de la lune par le méridien ; il connoîtra dans le triangle T O L, 1°. l'angle L O T, composé de l'angle observé L O B & de l'angle droit (254) B O T : 2°. l'angle A T O, mesuré par l'arc connu A O : 3°. le côté T O (462), & par conséquent (501) le côté T L, par cette proportion, *s* L : T O : : *s* O : T L ; le côté L O, par cette autre proportion, *s* L : T O : : *s* T : L O, & la distance L A, en soustrayant le rayon de la terre T A du côté connu L T.

* 515. Enfin il s'agit de connoître à peu près la distance de la terre au soleil. Soit S le soleil, L la lune demi-pleine, T la terre. Il faut remarquer 1°. que le soleil éclaire toujours la moitié de la lune tournée vers lui : 2°. que si l'on conçoit que l'hémisphere éclairé A B C de la lune est séparé de l'autre par un plan A C, une ligne S L menée du centre du soleil à celui de la lune est perpendiculaire à ce plan ; car le point L est également éloigné de A & de C, de même que le point S, puisque des tangentes tirées de S au demi-cercle A B C, seront égales (286), & que devant nécessairement déterminer les bornes du demi-cercle éclairé, elles aboutiroient aux points A, C (il faut remarquer que le diametre A C du plan qui sépare la partie éclairée de la lune de la partie obscure, ne passe pas exactement par le centre de la lune, mais un peu au dessus ; car si cela étoit, des tangentes tirées aux extrémités A, C du demi-cercle A B C, seroient paralleles & infinies) : donc S L est perpendiculaire au diametre A C (209) ; pour la même raison S L est perpendiculaire à tous les diametres du même plan, & par conséquent (394) au plan même : 4°. il faut observer que la ligne L T, menée du centre de la lune demi-pleine au centre de la Fig. 55.

terre, est dans le plan qui sépare l'hémisphere éclairé de l'autre, puisque sans cela on verroit de la terre plus ou moins de la moitié de l'hémisphere éclairé; 5°. qu'à cause de la longueur extrême des côtés LS, TS par rapport à LT, l'angle LST est très-petit. Les Astronomes disent qu'il est d'environ 12″: donc dans le triangle rectangle LST, on connoît, outre l'angle droit L, l'angle S, & le côté TL (514), & par conséquent (500) le côté ST, (il est de 16000 rayons de la terre), par cette proportion, *s* S : LT :: *s* L : ST.

516. Pour *trouver la surface d'un terrein triangulaire*, 1°. si le terrein est un triangle rectangle, comme
Fig. 50. AGC, un des côtés GC servant de base à ce triangle, l'autre AG en est la hauteur : il faut donc prendre dans ce cas la moitié du produit de ces deux côtés (361).

2°. Si le triangle est obliquangle, comme ABC, il suffit de mesurer le grand côté BC, de tendre de l'angle opposé A un cordeau AG, ou une chaîne perpendiculaire à BC, & de prendre la moitié du produit de BC par AG (361).

* 3°. Si l'on ne peut que mesurer le contour du triangle, il faut chercher par le calcul (504) la valeur d'un des deux segmens GC que feroit la perpendiculaire AG, si on pouvoit la tirer; on connoîtra dans le triangle rectangle AGC deux côtés AC, GC, & par conséquent (499) le côté AG, qui est la hauteur du triangle. La moitié du produit de AG par BC sera la surface du triangle BAC.

4°. Si on ne peut mesurer que deux côtés AB, AC, & prendre l'angle compris A, il faut d'abord chercher par le calcul le côté BC (506), ensuite la hauteur AG, comme je viens de le dire.

Fig. 33. 517. Pour *trouver la surface d'un terrein* ABCDEGH,

dont le contour est irrégulier : 1°. si l'on peut en mesurer les différentes dimensions, il faut le diviser en triangles par des lignes tirées du même angle A aux autres angles du terrein, prendre la surface (516) de chaque triangle, la somme de ces surfaces sera celle du terrein : 2°. Si on ne peut en mesurer que le contour & les angles, on connoîtra les côtés B A, B C & l'angle compris B, & par conséquent l'angle B C A, le côté C A (506) & la surface du triangle C A B (516) : donc on connoîtra dans le triangle D A C les côtés C A, C D, & l'angle compris D C A = D C B moins l'angle connu B C A : on connoîtra donc sa surface comme on a connu celle du triangle C A B : on connoîtra de même celle des autres triangles, & par conséquent celle du terrein entier. C'est ainsi qu'on mesure la surface d'un bois, d'un lac, &c.

* 518. S'agit-il de *lever la carte d'un païs* ? c'est-à-dire de tracer sur le papier une figure semblable à celle d'un pays, & telle que le rapport des distances des différens endroits soit le même sur le papier que sur le terrein. Soient A, B, C, D, E, F, O, G, H, L les endroits les plus considérables du pays, dont on veut lever la carte, comme les villes, les bourgs, les bois, les châteaux, les clochers, &c. Je choisis une base A B proportionnée à l'étendue du pays, telle que de ses extrémités on puisse appercevoir les endroits désignés par les lettres de la figure. Je la mesure, & du point A je prens avec le graphometre les angles D A B, E A B, F A B, H A B, L A B (on évite les angles trop aigus, comme seroient O A B, G A B, ou trop obtus, comme seroit C A B, parce qu'une petite erreur dans l'observation de ces angles est considérable dans l'opération); ensuite du point B je prends les angles A B D, A B E, A B F, A B H, A B L, laissant les angles trop obtus A B O, A B G, & l'angle trop aigu A B C. Je Fig. 56.

connois dans chacun de ces triangles le côté commun A B, & les deux angles adjacens à ce côté; je trace donc sur le papier une ligne A B, qui contienne autant de parties égales, prises sur une échelle, (c'est-à-dire sur une ligne qu'on a divisé en parties égales) que la base contient, par exemple, de lieues; je fais sur les extrémités de cette ligne des angles égaux aux angles pris avec le graphometre (on se sert pour cela du rapporteur, qui est un demi-cercle divisé en degrés, qui sert à faire des angles d'autant de degrés que l'on veut); ce qui forme des triangles semblables à ceux qui seroient formés sur le terrein, si on joignoit par des lignes ses principaux endroits, & les extrémités de la base A B : la pointe de ces triangles détermine donc sur le papier la position respective de ces endroits; car les côtés de ces petits triangles sont proportionnels à ceux des triangles observés, c'est-à-dire que de même que la base A B contient autant de lieues sur le terrein qu'elle contient sur le papier de parties de l'échelle, de même chaque autre côté des triangles, pris sur le terrein, contient autant de lieues que son côté homologue sur le papier contient de parties de l'échelle.

Pour déterminer sur le papier la position du point G, je prends en B l'angle G B H, en H l'angle B H G, & je trace sur le papier un triangle semblable au grand triangle B H G, qui ait pour base le côté B H du triangle A B H déja tracé; la pointe de ce triangle déterminera sur le papier la position du point G. On déterminera de même celle du point C. Pour trouver celle du point O, je prends en F l'angle O F G, en G l'angle O G F, & je fais sur le papier, aux deux extrémités de la ligne F G, des angles égaux aux angles observés, ce qui forme un triangle, dont la pointe détermine sur le papier la position du point O. Les lignes F O, G O, G H, C D, peuvent ensuite servir de nouvelles

bases, d'où l'on découvre d'autres objets ; c'est ainsi qu'on joint la carte d'une contrée à celle d'une autre, & que se forment de proche en proche les cartes de plusieurs Provinces & des Royaumes entiers.



LEÇON NEUVIE'ME.

Des Sections coniques.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

519. J'Appelle *fonction* d'une grandeur cette même grandeur augmentée ou diminuée de quelque façon que ce soit, c'est-à-dire par l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Division, ou par son élévation à quelque puissance, ou enfin par l'extraction de quelque racine.

520. Toute courbe décrite sur un plan peut être considérée comme formée par le mouvement d'un point qui se détourne à chaque pas, & par conséquent comme un composé de lignes droites infiniment petites, obliques les unes aux autres, & qu'on peut regarder comme autant de points ; d'où il suit *que la tangente d'une courbe quelconque ne la touche qu'en un point ;* car elle est le prolongement d'une des lignes infiniment petites qui composent la courbe ; or cette ligne étant oblique à ses voisines, son prolongement ne les touchera pas.

521. Soit S *s* une droite au dedans de la courbe S M, & qui la rencontre en S. Soit à ce point S une Fig. 57. & 58.

tangente S L ; si des différens points M de la courbe on mene à la droite S s des lignes, telles que M P, paralleles à la tangente S L, on appelle ces lignes *ordonnées* ; les lignes telles que P S, *abcisses* ; le point S, *l'origine des abcisses* ; la ligne S s, la *ligne des abcisses* ; elle s'appelle l'*axe* de la courbe, si les ordonnées & la tangente lui sont perpendiculaires ; ou *diametre*, comme M O, si la tangente T A, qui passe par son origine M, lui est oblique.

Fig. 57. 522. Si les ordonnées M P de la courbe vont toujours en augmentant, il est clair que la courbe n'est pas rentrante, mais qu'elle va toujours en s'élargissant. On peut dans ce cas mener des points différens, tels que M, de la courbe des lignes, telles que M L, (*fig.* 57.) à la tangente S L parallelement aux abcisses P S, & qui passeront toutes hors de la courbe ; on les appelle *coordonnées*.

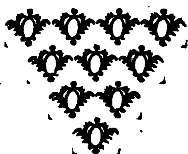
Fig. 57. & 58. 523. Si la tangente T A, qui passe par un point M de la courbe M S, rencontre en T, par exemple, l'axe S s de cette courbe suffisamment prolongé, & si du même point on mene une ordonnée M P à cet axe, la ligne P T est nommée la *soutangente*. Si du même point M on éleve une perpendiculaire M B à la tangente T A, elle s'appelle *normale*, & la partie B P comprise entre l'ordonnée & la normale, s'appelle *sous-normale*.

524. Le rapport constant qui se trouve entre quelque même fonction de chaque ordonnée, & quelque même fonction de son abcisse, forme la *nature de la courbe* ; & l'expression algébrique de ce rapport constant s'appelle *l'équation à la courbe* ; d'où on tire les propriétés qui la caractérisent. Par exemple B C étant le diametre du cercle B A C (*fig.* 31.) & une tangente en B étant perpendiculaire sur B C (254), A D sera l'ordonnée (521), B D, D C seront les abcisses ; & parce que le quarré de cette ordonnée, comme de

toute autre, eſt égal au produit de ſes abciſſes, les quarrés des différentes ordonnées dans le cercle ſont entr'eux comme les produits de leurs abciſſes.

Voilà donc le rapport conſtant d'une même fonction (c'eſt-à-dire du quarré) de chaque ordonnée du cercle à une même fonction d'une de ſes abciſſes (c'eſt-à-dire à ſon produit par l'autre abciſſe) : c'eſt là la nature du cercle. Il eſt maintenant aiſé de former une expreſſion algébrique, qui contienne ce rapport conſtant; car faiſant une ordonnée quelconque A D $= y$, la partie O D, compriſe entre le centre & l'ordonnée, $= x$, le demi-diametre BO, ou CO $= a$, la plus petite abciſſe B D ſera $a - x$, la plus grande DC ſera $a + x$, leur produit ſera $aa - xx$, & l'on aura conſtamment $yy = aa - xx$, c'eſt là l'équation au cercle, qui marque que dans le cercle les yy ſuivent la raiſon des $aa - xx$, ou bien que les quarrés des ordonnées ſont proportionnels aux produits de leurs abciſſes.

Nous allons faire de la même maniere dans cette leçon la recherche de l'équation à la *parabole*, à l'*ellipſe*, & à l'*hyperbole*. On a donné à ces trois courbes & au cercle le nom général de *ſection conique*, parce qu'il eſt démontré que ſi l'on coupe un cone par un plan, le contour de la ſection ſera un cercle, une ellipſe, une parabole, ou une hyperbole, ſelon les degrés d'inclinaiſon du plan coupant par rapport à l'axe du cone. Nous conſidérerons ſeulement ces courbes décrites ſur un plan.



DE LA PARABOLE.

DEFINITIONS.

Fig. 57. 525. LA *parabole est une courbe* SM, *dont chaque point*, tel que M, *est également éloigné de la* droite DE, nommée la *directrice*, & posée sur le plan où la courbe est décrite, & du point F, nommé le *foyer*, pris à volonté sur le même plan, hors de cette droite.

526. Une droite quadruple de la distance d'un point quelconque S ou M de la parabole à la directrice, s'appelle le *parametre* du diametre S*s* ou MO, qui rencontre la parabole à ce point. Le point S de la courbe, qui est le plus proche de la directrice, s'appelle le *sommet* de la parabole.

527. On n'appelle *diametre* de la parabole que les droites paralleles à l'axe S*s*, telles que MO. La tangente TA étant oblique au diametre MO, tiré du point de contact M, & les ordonnées à ce diametre, comme *m*G étant paralleles à la tangente TA, sont aussi obliques à MO. Une droite quelconque tirée du foyer à la courbe, comme FM, (*fig.* 57. 58. & 60.) s'appelle *rayon recteur*.

THEOREMES.

528. Soit tirée par le foyer F une droite *s*E perpendiculaire à DE; je dis 1°. que *la parabole coupe* FE *en deux également*; car le point d'intersection S est également éloigné de la directrice & du foyer (525).

529. 2°. Que le *point d'intersection* S *est le sommet de la parabole*; car si du point S on éleve une perpendiculaire SL à la ligne FE, tous les autres points de la

parabole seront au dessous de S L, puisque chaque autre point de S L étant aussi éloigné de D E que le point S, mais plus éloigné de F, se trouve au dessus de la parabole, dont tous les points sont aussi éloignés de D E que de F (525).

530. 3°. Que *la perpendiculaire* S L *à* F E *est tangente à la parabole au point* S, puisqu'elle ne touche la parabole qu'en ce point (529).

531. 4°. Que *la droite* S s *est l'axe de la parabole* (521); car la tangente S L du point S est perpendiculaire (530) à la droite S *s*, qui est par conséquent (521) l'axe de la parabole.

532. 5°. Que *le quadruple de* S E *ou* (528) *de* S F *est le parametre de l'axe de la parabole* (526), puisque l'axe prolongé *s* E étant perpendiculaire à la directrice, S E mesure la distance de S à D E.

533. Je ferai dans la suite la constante S E ou S F $= C$, le parametre de l'axe ou $4C = p$, $SP = x$, $MP = y$: on aura donc, $PS + SE$, ou MD, ou (525) $MF = x + c$, $FP = x - c$.

534. *L'équation à la parabole est* $yy = px$, *c'est-à-dire que le quarré d'une ordonnée quelconque* M P *à l'axe d'une parabole est égal au produit de son abcisse* S P *par le parametre*; car le triangle rectangle M P F donne (374) $MF^2 = MP^2 + FP^2$; ou en termes algébriques, $x^2 + 2xc + c^2 = yy + x^2 - 2xc + c^2$ (533); ou, en transposant & réduisant, $yy = 4cx$; ou à cause de $4c = p$ (533), $yy = px$.

535. Donc 1°. *l'ordonnée est moyenne proportionnelle entre l'abcisse & le parametre*; car puisque $yy = px$, donc (129) $x : y :: y : p$.

536. 2°. *Les quarrés des ordonnées à l'axe sont entr'eux comme leurs abcisses*; car puisque $yy = px$, & $YY = PX$, donc $yy : YY :: px : PX$; or (119) $px : PX :: x : X$: donc $yy : YY :: x : X$.

537. 3°. *La parabole s'éloigne toujours de l'axe depuis le sommet* S (522), puisque x croissant, yy croît dans la même proportion (536).

538. 4°. *L'axe de la parabole divise en deux également chaque soutendante* m m *qui lui est ordonnée*; car les deux ordonnées *p m*, *p m* ayant la même abcisse *p* S, sont égales (536).

539. Donc aussi *l'axe divise en deux également l'espace compris par la courbe entre chaque double ordonnée & le sommet, de même que la courbe qui comprend cet espace.*

PROBLEME.

540. *Pour mener une tangente à un point* M *de la parabole*, menez de M à la directrice la perpendiculaire M D, tirez la ligne F D, & divisez-la en deux également par la perpendiculaire T A, ce sera la tangente demandée; car le triangle D M F étant isocele (525), la perpendiculaire, qui divise en deux également sa base F D, passe par M (242); & de plus tous les autres points de T A sont au dessus de la courbe : car une ligne tirée d'un autre point que M en F, est égale à une ligne tirée du même point en D; & par conséquent plus longue qu'une perpendiculaire menée de ce point à D E; au lieu qu'une ligne tirée d'un point quelconque de la courbe en F, est égale à une perpendiculaire menée du même point sur D E : donc tout autre point que M est plus près de D E que de F dans la droite T A, & aussi près de D E que de F dans la courbe : donc tous les points de T A, hors M, sont au-dessus de la courbe.

541. *L'angle* O M A *est égal à l'angle* F M T; car O M A = D M T (203) = F M T, à cause des triangles D I M, F I M égaux en tout.

542. *La soutangente* P T *d'une ordonnée quelconque*

M P

MP *à l'axe est double de l'abcisse* SP, ou $PT = 2SP$, ou $SP = ST$; car le triangle MFT est isocele, à cause de l'angle $FMT = DMT$, qui est égal à son alterne MTF: donc $FM = FT$: donc la perpendiculaire FI sur la base TM donne $IT = IM$ (242); & par conséquent les triangles rectangles TIS, MIL sont égaux en tout: donc $ST = ML = SP$.

543. *La sous-normale* BP *est égale à la moitié du parametre*, ou $BP = 2SE = FE$ (532), à cause des triangles DEF, MPB, égaux en tout.

544. *Toutes les sous-normales sont égales entr'elles*; car chacune est égale (543) à la grandeur constante FE.

545. *Le parametre* q *d'un diametre quelconque* MO *surpasse le parametre* p *de l'axe du quadruple de l'abcisse* SP, *qui répond à l'ordonnée* MP, *menée à l'axe de l'origine* M *du diametre*; car $4MD = 4SE + 4SP$, ou $q = p + 4SP = p + 4x$.

546. *Le parametre* q *d'un diametre quelconque* MO *est une troisiéme proportionnelle à l'abcisse* SP, *qui répond à l'ordonnée* MP, *menée à l'axe de l'origine* M *de ce diametre*, & *à la tangente* MT, *tirée du même point à l'axe* Ss *suffisamment prolongé*, ou $\div x . MT . Q$, ou bien $MT^2 = qx$; car le triangle rectangle MPT donne $MT^2 = MP^2 + PT^2$; or $MP^2 = yy = px$ (534), & $PT^2 = 4xx$ (542): donc $MT^2 = px + 4xx = \overline{p+4x}\,x = qx$ (545).

547. *La perpendiculaire* FI *tirée du foyer sur la tangente* TA, *à un point quelconque* M *de la parabole*, *suit la raison de la racine quarrée du rayon recteur* FM, *tiré au point de contact*; car le triangle rectangle TIF donne (335) $\div FS . FI . FT$ ou (542) FM: donc $FI^2 = FS \times FM$; & à cause de la grandeur constante FS, FI^2 suit la raison de FM, & FI celle de $\sqrt{FM}$.

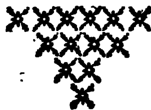
548. *Le quarré d'une ordonnée quelconque* mG *à un*

diametre quelconque MO, *est égal au produit de son abcisse* MG *par le parametre* Q *de ce diametre.*

Soit tirée l'ordonnée mp à l'axe & sa parallele GC. Soit MP, Rp ou GC $= y$, SP $= x$, pc ou RG $= b$, PC ou MG $= d$; je dis que les triangles TPM, GRm sont semblables; car l'angle PTM est égal à son alterne TMD, qui est égal à son correspondant mGR : donc on a la proportion PT : TM :: GR : Gm, ou $PT^2 : TM^2 :: GR^2 : Gm^2$; or $PT^2 = 4xx$ (542), $TM^2 = qx$ (546), & $GR^2 = 4dx$, comme nous le démontrerons bientôt : donc (137) $Gm^2 = \frac{4qdxx}{4xx} = qd = q \times$ MG.

Il reste à prouver que $GR^2 = 4dx$. Pour cela je dis qu'à cause des triangles semblables TPM, GRm, on a PT : PM :: GR : R$m = \frac{by}{2x}$ (137); mais $pm = p\text{R} - \text{R}m = y - \frac{by}{2x}$: donc $pm^2 = yy - \frac{byy}{x} + \frac{bbyy}{4xx}$, & comme (536) SP : S$p$ :: $PM^2 : pm^2$, ou $x : x + d - b :: yy : yy + \frac{dyy}{x} - \frac{byy}{x} = pm^2$ on aura, en égalant ces deux valeurs de pm^2, l'équation $yy + \frac{dyy}{x} - \frac{byy}{x} = yy - \frac{byy}{x} + \frac{bbyy}{4xx}$, ou transposant & réduisant $\frac{dyy}{x} = \frac{bbyy}{4xx}$, en ôtant les fractions, (171) & divisant les deux membres par yyx, $4dx = bb$: donc puisque GR $= b$, $GR^2 = 4dx$; ce qui restoit à démontrer.

549. Il suit du n°. précédent & du n°. 534. que *dans la parabole les diametres ont les mêmes propriétés que les axes.*



DE L'ELLIPSE.

DEFINITIONS.

560. L'*Ellipse est une courbe* SMD*sdZ*S *telle que* Fig. 58.
la somme MF + M*f des distances de chacun de ses points*, comme M, *aux deux* points déterminés F, *f*, qu'on appelle *foyers*, *est toujours la même*.

561. Et par conséquent pour *décrire une ellipse*, il suffit de fixer à deux points quelconques F, *f* les deux extrémités d'un fil plus long que la distance F*f* de ces points, & de faire rouler autour d'eux un stile qui tienne toujours le fil tendu; la trace du stile formera une ellipse; car dans ce cas la somme des distances du stile aux deux foyers est toujours la même; puisqu'elle est toujours égale à la longueur du fil.

562. La droite S*s*, qui passe par les deux foyers F*f*, s'appelle le *grand axe* de l'ellipse. La droite D*d*, qui divise perpendiculairement en deux parties égales la distance F, *f* des foyers, est le *petit axe*. Le point d'intersection C des deux axes est le *centre*, F*f* l'*excentricité*; une droite MO qui traverse l'ellipse, en croisant les deux axes au centre, est un *diametre*; un autre diametre KZ parallele à la tangente TA, qui passe par l'origine M du premier diametre, s'appelle *diametre conjugué* au diametre MO. Les ordonnées, comme LV, à un diametre MO, devant être paralleles à la tangente qui passe par l'origine de ce diametre (521), doivent donc être paralleles à son diametre conjugué KZ.

563. Une troisiéme proportionnelle aux deux axes, ou à deux diametres conjugués quelconques, s'appelle

le *parametre* du premier terme de la proportion ; par exemple, si l'on fait ÷ S s. D d . p, la ligne p sera le parametre du grand axe S s. Si on avoit ÷ D d. S s. q, la ligne q seroit le parametre du petit axe D d.

THÉOREMES.

564. *La distance de chaque foyer au bout le plus proche du grand axe* S s *est la même*, ou F S = $f\,s$; car la somme des distances du point S aux deux foyers est 2 S F + F f, & la somme des distances de s aux mêmes foyers est 2 $s\,f$ + F f ; ôtant de ces deux sommes égales (560) la partie commune F f, il reste les quantités égales 2 F S, 2 $f\,s$, & par conséquent F S = $f\,s$.

565. *Donc le grand axe est divisé en deux également par le petit axe*, ou C S = C s.

566. *La somme des distances des deux foyers à chaque point* M *de l'ellipse, est égale au grand axe* S s ; car la somme des distances de S aux foyers est S F + S P + F f, ou (564) S F + $s\,f$ + F f, ou S s ; & la somme des distances des deux foyers à chaque autre point de la courbe est la même (560). Donc, &c.

567. *La distance du bout du petit axe à un des foyers est égale à la moitié du grand axe* ; car F d + $f\,d$ = S s (566) ; & d'ailleurs F d = $f\,d$, puisque le point C de la perpendiculaire d D étant aussi éloigné de F que de f, le point d doit l'être aussi : donc F d, ou $f\,d$ = $\frac{1}{2}$ S s = C S (565).

568. Pour la même raison une ligne tirée de f en D seroit égale à C S, & formeroit par conséquent le triangle f C D égal en tout au triangle f C d : donc on auroit C D = C d : donc *le petit axe est divisé en deux également par le grand axe*.

569. Il est évident par le n°. 567. qu'*une ellipse étant donnée*, pour *en trouver les foyers*, il faut du bout

du petit axe porter sur le grand axe deux droites égales, chacune au demi-grand axe. Leurs points de rencontre avec le grand axe seront les foyers.

570. Je ferai dans la suite le demi-grand axe CS, ou C$s = a$, le demi-petit axe CD, ou C$d = b$, le parametre du grand axe $= p$, la demi-excentricité CF, ou C$f = c$, l'ordonnée MP $= y$, la partie CP du grand axe, comprise entre le centre C & l'ordonnée $= x$: on aura donc SP $= a - x$, sP $= a + x$, FP $= c - x$ fP $= c + x$, sf, ou SF $= a - c$, sF ou Sf $= a + c$, & puisque FM $+ f$M $= 2a$ (566); si on fait $= 2z$ la différence de FM à fM, on aura (177) fM $= a + z$, & FM $= a - z$. Il faut se rendre familieres toutes ces dénominations.

571. *Le quarré* bb *du demi-petit axe est égal au produit* aa — cc *des distances* a + c, a — c *d'un des foyers aux bouts du grand axe* ; car le triangle rectangle Fcd donne $cd^2 = Fd^2 - Fc^2$, ou (570) $bb = aa - cc$.

572. *L'équation à l'ellipse est* $aayy = aabb - bbxx$ ou $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$; car à cause des triangles rectangles FPM, fPM, on a 1°. $FP^2 + PM^2 = FM^2$, 2°. $fp^2 + PM^2 = fM^2$, ou en termes algébriques (570) :

1°. $cc - 2cx + xx + yy = aa - 2az + zz$

2°. $cc + 2cx + xx + yy = aa + 2az + zz$.

Otant la premiere de ces équations de la seconde, le premier membre du premier, le second du second, reste $4cx = 4az$: donc $z = \frac{cx}{a}$, mettant $\frac{cx}{a}$ & $\frac{ccxx}{aa}$ au lieu de z & de zz dans la premiere des équations précédentes, on a $cc - 2cx + xx + yy = aa - 2cx + \frac{ccxx}{aa}$. Otant la fraction, transposant & réduisant, on a $aayy = a^4 - aacc - aaxx + ccxx$, & divisant chaque membre par $aa - cc$, $\frac{aayy}{aa - cc} = aa - xx$, ou (à cause de

$bb=aa-cc$ (571) $\frac{aayy}{bb}=aa-xx$; donc $aayy=aabb-bbxx$, ou $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$.

573. Gardant les mêmes dénominations que dans le nº. 570, on aura $MG=PC=x$, $GC=MP=y$, & par conſéquent $GD=b-y$, & $Gd=b+y$: cela poſé, je dis que *l'équation au petit axe d'une ellipſe eſt* $bbxx=aabb-aayy$, ou $xx=aa-\frac{aayy}{bb}$; car tranſpoſant, diviſant & réduiſant, on tire cette équation de l'équation à l'ellipſe $aayy=aabb-bbxx$, qu'on vient de trouver (572).

Si on fait $MG=y$, $CG=x$, $CD=a$; $CS=b$, & ſi dans l'équation au petit axe qu'on vient de trouver, on ſubſtitue y à x, a à b, & réciproquement, on trouvera que *la ſeconde équation au petit axe d'une ellipſe eſt* $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$.

574. *L'équation au parametre du grand axe de l'ellipſe eſt* $yy=\frac{ap}{2}-\frac{pxx}{2a}$; $\div\div\ 2a \,.\, 2b \,.\, p$. (563) : donc $4bb=2ap$, & $bb=\frac{ap}{2}$; or ſubſtituant $\frac{ap}{2}$ à bb dans l'équation à l'ellipſe (572), on trouve $yy=\frac{ap}{2}-\frac{pxx}{2a}$.

575. *L'équation au parametre* q *du petit axe de l'ellipſe eſt* $xx=\frac{bq}{2}-\frac{qyy}{2b}$; car $\div\div\ 2b \,.\, 2a \,.\, q$ (563) : donc $4aa=2bq$, & $aa=\frac{bq}{2}$; or ſubſtituant $\frac{bq}{2}$ à aa dans la premiere équation au petit axe (573), on trouve $xx=\frac{bq}{2}-\frac{qyy}{b}$.

Si on change les dénominations, comme on l'a fait (573) pour la ſeconde équation au petit axe, & ſi on fait $q=p$, en ſubſtituant y à x, x à y, a à b, & p à q, on trouvera que *la ſeconde équation au parametre du petit axe d'une ellipſe eſt* $yy=\frac{ap}{2}-\frac{pxx}{2a}$.

576. En comparant *les équations aux deux axes de l'ellipse, de même que les équations à leurs parametres*, il est aisé de voir qu'elles *sont respectivement les mêmes*; ce qui fait augurer déja que les deux axes de l'ellipse ont les mêmes propriétés respectives.

577. Il suit de ces différentes équations, que 1°. *le quarré d'une ordonnée au grand axe* M P *est au produit* $SP \times sp$ *de ses abcisses, comme le quarré du petit axe* C D *est au quarré du grand axe* C S, ou comme $4bb$ à $4aa$; car de l'équation à l'ellipse $aayy = aabb - bbxx$, on tire (129) $yy : aa - xx :: bb : aa$, ou (116) $yy : aa - xx :: 4bb : 4aa$.

578. 2°. *Les quarrés de différentes ordonnées sont entr'eux comme les produits de leurs abcisses*, puisque le quarré de chaque ordonnée est au produit de ses abcisses dans la raison constante du petit axe au grand axe (577).

579. 3°. *Le quarré d'une ordonnée au grand axe est au produit de ses abcisses, comme le produit des distances d'un des foyers aux extrémités du grand axe est au quarré du demi-grand axe*; car dans la proportion trouvée (577) $yy : aa - xx :: bb : aa$, on peut substituer à bb l'expression $aa - cc$ son égale (571), qui est le produit de F S par F s (570).

580. 4°. *Le quarré d'une ordonnée au grand axe est au produit de ses abcisses comme le parametre du grand axe est au grand axe*; car de l'équation déja trouvée (574) au parametre du grand axe de l'ellipse, c'est-à-dire de $yy = \frac{ap}{2} - \frac{pxx}{2a}$, ou $4ayy = 2aap - 2pxx$, ou $2ayy = aap - pxx$, on tire $yy : aa - xx :: p : 2a$.

581. 5°. *Le quarré d'une ordonnée* M G *au petit axe d'une ellipse est au produit* $GD \times Gd$ *de ses abcisses, comme le quarré du grand axe est au quarré du petit axe*, ou (116) comme CS^2 est à CD^2; car de la premiere

équation au petit axe, c'est à-dire (573) de $bbxx = aabb - aayy$, on tire $xx : bb - yy :: aa : bb$, ou $xx : bb - yy :: 4aa : 4bb$.

On tire de la seconde équation au petit axe $yy : aa - xx :: bb : aa$, proportion qui est la même que la précédente sous différentes dénominations.

582. 6°. *Le quarré d'une ordonnée au petit axe est au produit de ses abcisses, comme le parametre du petit axe est au petit axe*; car de la premiere équation au parametre du petit axe qu'on a trouvée (575), c'est-à-dire de $xx = \frac{bq}{2} - \frac{qyy}{2b}$, ou $4bxx = 2bbq - 2qyy$, ou $2bxx = bbq - qyy$, on tire $xx : bb - yy :: q : 2b$.

On tireroit de la même maniere de la seconde équation au parametre du petit axe la proportion, $yy : aa - xx :: p : 2a$, qui ne differe pas dans le fond de la précédente.

583. En général *les deux axes d'une ellipse ont les mêmes propriétés respectives*; car toutes les propriétés des deux axes dépendent de leurs équations, qui sont respectivement les mêmes.

J'ai dit que les deux axes ont les mêmes propriétés *respectives*, parce qu'il est faux, par exemple, que le quarré de l'ordonnée M G au petit axe soit au produit des abcisses de l'ordonnée M P au grand axe, comme le petit axe est au grand axe (ce seroit dans ce cas une propriété dans les deux axes absolument la même); mais le petit axe est par rapport à son ordonnée, comme le grand axe par rapport à la sienne, & par conséquent le quarré d'une ordonnée au petit axe est au produit de ses abcisses, comme le quarré du grand axe au quarré du petit axe; c'est ce que j'appelle une propriété dans les deux axes respectivement la même.

584. *L'ellipse est une courbe rentrante, dont les ordonnées au grand axe vont en augmentant, depuis un sommet*

S *jusqu'au demi-petit axe* C D, *& diminuent ensuite de la même maniere jusqu'à l'autre sommet* s. *La plus grande de toutes est le demi-petit axe* C D; car dans la proportion trouvée (577) $yy : aa - xx :: bb : aa$, la raison de bb à aa étant constante, yy croît dans la même raison que $aa - xx$, ou que le produit des abcisses de y; or à proportion que l'ordonnée est plus près de de C D, ou, ce qui revient au même, à proportion que la petite abcisse augmente & que la grande diminue, leur produit augmente toujours (il est aisé de s'en assurer sur des exemples en nombres), & devient enfin le plus grand de tous, lorsque les abcisses sont égales, ou que l'ordonnée est le plus petit axe lui même (565). Donc, &c.

585. *Les ordonnées également éloignées du centre sont égales* (578), puisqu'elles ont des abcisses égales.

On démontreroit de la même maniere ces deux dernieres propositions pour les ordonnées au petit axe.

586. *Chaque axe coupe en deux également toutes les soutendantes de la courbe qui lui sont ordonnées*; car les deux parties sont des ordonnées également éloignées du centre.

587. *Donc aussi chaque axe coupe l'espace elliptique, de même que la courbe qui le borde en deux parties égales; & par conséquent cet espace & la courbe sont divisés en quatre parties égales par les deux axes.*

588. *Les perpendiculaires* u d, L S *élevées sur les extrémités du petit & du grand axe, sont tangentes à l'ellipse*; car cd mesure la distance du grand axe S s à sa parallele ud, & comme cd est la plus grande (584) de toutes les ordonnées au grand axe, aucune des autres n'atteint ud, qui a par conséquent tous ses points, excepté d hors de l'ellipse : on prouvera de même que S L est tangente de l'ellipse en S.

La définition que nous avons donnée de l'axe d'une

courbe (521), convient donc parfaitement aux droites D d, S s.

589. Pour *mener une tangente* T A *à un point* M *de l'ellipse*, prolongez fM en E, de façon que ME=MF, vous aurez fE=S s (566). Décrivez de M, comme centre, l'arc F I E, divisez-le en deux également, & par le milieu I, tirez en M la droite T A; ce sera la tangente cherchée : en effet tous les points de T A, hors M, sont au-dessus de l'ellipse (566), puisque la somme des droites tirées de tout autre point en E & en f, seroit plus longue que F E ou que S s.

590. Les angles F M T, fM A faits avec la tangente T A, au point de contact par deux rayons recteurs F M, f M sont égaux; car fM A = E M T, (203) = F M T (589).

591. *L'expression de la sous-normale* BP *est* $\frac{aax-ccx}{aa}$; ou (substituant bb au lieu de $aa-cc$ (571) $\frac{bbx}{aa}$, ou enfin substituant $\frac{ap}{2}$ au lieu de bb (574) $\frac{px}{2a}$.

Car on a trouvé (572) $cc-2cx+xx+yy=FM^2$. On a aussi trouvé dans le même n°. yy, ou $PM^2=\frac{a4-aacc-aaxx+ccxx}{aa}$; substituant dans la premiere équation cette valeur de yy, ôtant la fraction & réduisant, on trouve $\frac{a4-2aacx+ccxx}{aa}=FM^2$, & $\frac{aa-cx}{a}=FM$. Cela posé, à cause des paralleles BM, FE, on a fE : fF :: ME : ou FM : BF, ou $2a:2c::\frac{aa-cx}{a}:\frac{aac-ccx}{aa}=BF$; or $BP=BF-FP$, & $FP=c-x$: donc $BP=\frac{aac-ccx}{aa}-c+x=\frac{aax-ccx}{aa}$.

592. *L'expression du quarré* BM² *de la normale* BM, est $\frac{b^4 x^2 + a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2}{a^4}$.

Car $BM^2 = BP^2 + PM^2 =$ (591 & 592) $\frac{b^4 x^2}{a^4} + bb - \frac{bbxx}{aa} = \frac{b^4 x^2 + a^4 b^2 - a^2 b^2 x^2}{a^4}$.

593. *L'expression de la soutangente* PT *est* $\frac{aa - xx}{x}$; car le triangle rectangle BMT donne (634) ÷ BP. PM. PT : donc $PT = \frac{PM^2}{BP}$; or divisant $bb - \frac{bbxx}{aa}$ par $\frac{bbx}{aa}$; & divisant encore les deux termes du quotient $\frac{aabb - bbxx}{bbx}$ par bb, on trouve $PT = \frac{aa - xx}{x}$.

594. *L'expression de* CT *est* $\frac{aa}{x}$.

Car $CT = PT + CP = \frac{aa - xx}{x} + x = \frac{aa}{x}$.

595. Donc on a constamment la proportion continue ÷ CP . CS . CT; car puisque $CT = \frac{aa}{x}$, on a ÷ x . a . CT.

596. *Donc pour mener à un point* M *de l'ellipse une tangente par une autre méthode que celle du n°.* 589, après avoir tiré l'ordonnée MP, il faut chercher une troisiéme proportionnelle CT (351), aux lignes CP, CS, porter la longueur CT de cette ligne sur le demi-grand axe CS prolongé, & par le point T mener une droite en M.

597. *Enfin l'expression de* ST *est* $\frac{aa - ax}{x}$.

Car $ST = CT - CS = \frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{x}$.

598. Les deux axes d'une ellipse ayant les mêmes propriétés respectives, on a $CA = \frac{bb}{y}$; car CT =

$\frac{aa}{x}$ (595) : on pourroit prouver la même chose plus directement ainsi, le triangle BMP est semblable au triangle MPT (334), qui est lui-même semblable au triangle ACT (246) : donc les triangles BMP, ACT sont semblables : donc MP : BP :: CT : GA, ou $y : \frac{bbx}{aa} :: \frac{aa}{x} : \frac{bbaax}{yaax} = \frac{bb}{y}$.

599. *On a donc aussi pour le petit axe la proportion continue* $\div$ CG . CD . CA *ou* CG × CA = CD²; car de CA $= \frac{bb}{y}$ on tire $\div\, y . b .$ CA.

600. Tout diametre MO d'une ellipse est divisé en deux également au centre C ; de M abaissez l'ordonnée MP, prenez CH = CP, & sur le point H élevez une perpendiculaire HO, jusqu'au diametre les triangles CPM, CHO sont égaux en tout par la construction : donc CM = CO, & PM = HO ; or les ordonnées également éloignées du centre sont égales (585), & PM est une ordonnée : son égale HO est donc aussi une ordonnée, & le point O est dans la courbe : donc O est l'extrémité du diametre, & CO = CM.

Fig. 59. 601. Soit SA *sa* un cercle décrit sur l'axe S*s* de l'ellipse SD *sd*. Soient NT, QI deux diametres du cercle perpendiculaires l'un à l'autre ; NP, QX deux ordonnées du cercle au diametre S*s* ; MO, KZ deux diametres conjugués de l'ellipse ; BF une ordonnée du cercle au diametre NT, LV une ordonnée correspondante de l'ellipse au diametre MO ; & soit le demi-diametre CO = a, le demi-diametre conjugué CZ = b ; l'ordonnée LV = y, l'abciffe CV = x, le rayon du cercle CS, CQ, ou CA = r ; cela posé je dis que *l'équation à l'ellipse par rapport à ses diametres conjugués est* $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$.

Car si l'on suppose un rayon du cercle tiré en B,

le triangle rectangle CFB donnera CB^2, ou $rr = CF^2 + FB^2$; or $CF^2 = \frac{rrxx}{aa}$ & $FB^2 \frac{rryy}{bb}$, comme nous le démontrerons bientôt : donc $rr = \frac{rrxx}{aa} + \frac{rryy}{bb}$: ôtant les fractions & divisant ensuite les deux membres par rr, $aabb = bbxx + aayy$, ou $aayy = aabb - bbxx$, ou $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$.

Il reste à prouver que $CF^2 = \frac{rrxx}{aa}$, & que $FB^2 = \frac{rryy}{bb}$, ou bien que $CF = \frac{rx}{a}$, & que $FB = \frac{ry}{b}$. 1°. Les triangles semblables CFV, CTO donnent CO : CT :: CV : CF, ou $a : r :: x : CF$: donc $CF = \frac{rx}{a}$. 2°. Les triangles semblables FXV, BXL, QCZ, donnent FX : BX :: VX : LX, ou FX + BX : BX :: VX + LX : LX, ou FB : BX :: LV : LX, ou FB : LV :: BX : LX, ou enfin FB : LV :: CQ : CZ : donc $FB = \frac{ry}{b}$, ce qui restoit à démontrer.

602. *Donc le quarré d'une ordonnée* LV *à un diametre quelconque* MO, *est au produit* VO × VM *de ses abcisses, comme le quarré du diametre conjugué* KZ *est au quarré du premier diametre* MO, ou comme CZ^2 est à MC^2; car de l'équation $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$, on tire (129) $yy : aa - xx :: bb : aa$; & par consequent $yy : aa - xx :: 4bb : 4aa$.

603. *En général les diametres conjugués & les deux axes d'une ellipse ont les mêmes propriétés respectives*; car les équations à l'ellipse par rapport à ses diametres conjugués, & par rapport à ses axes, sont respectivement les mêmes (601 & 572); or c'est de ces équations que se déduisent toutes les propriétés des diametres & des axes.

604. *Si des extrémités* MZ *de deux diametres conjugués, on mene deux ordonnées* MP, ZF *au grand axe* Fig. 58.

S s, *le quarré de la droite* C F *comprise entre le centre & une des ordonnées, est égal au produit* P S × P S *des abcisses de l'autre ordonnée*; car faisant C F $= u$, on aura F S $= a - u$, F s $= a + u$; cela posé, M P² : Z F² :: P S × P s : F S × F s (578); & les triangles T P M, C F Z étant semblables, à cause des paralleles T M, C Z (562), donnent M P² : Z F² :: P T² : C F²: donc P S × P s : F S × F s :: P T² : C F², ou en termes algébriques, $aa - xx : aa - uu :: \frac{aa - xx^2}{xx} : uu$: donc $uu = \frac{aa - uu \times aa - xx^2}{xx \times aa - xx}$

ou, $uu = \frac{aa - uu \times aa - xx}{xx}$, d'où il est aisé de tirer par les régles ordinaires des équations $uu = aa - xx$, ou C F² = P S × P s, & $xx = aa - uu$, ou C P² = F S × F s, ce qu'il falloit démontrer.

605. *La somme des quarrés de deux diamétres conjugués quelconques est égale à la somme des quarrés des deux axes, & par conséquent elle est une grandeur constante*; car Z F² : F S × F s :: $bb : aa$ (577); & mettant C P² ou xx, au lieu de la grandeur F S × F s son égale (604), Z F² : xx :: $bb : aa$: donc Z F² $= \frac{bbxx}{aa}$; & d'ailleurs C M² = C P² + P M² $= xx + bb - \frac{bbxx}{aa}$, & C Z² = C F² + Z F² $= aa - xx + \frac{bbxx}{aa}$; donc réduction faite, C M² + C Z² $= aa + bb$.

Fig. 59. 606. *Les ordonnées* M P, Z X *d'une ellipse sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes* N P, Q X *d'un cercle* S A, s *décrit sur le grand axe* S s; car M P² : Z X² :: P S × P s : X s × X S (578): pareillement (524) N P² : Q X² :: P S × P s : X s × X S: donc M P² : Z X² :: N P² : Q X²; ou (233) N P : M P :: Q X : Z X.

607. *Les excès des ordonnées au cercle sur les ordon-*

nées correspondantes à l'ellipse leur sont proportionnelles; car *subtrahendo*, NP — MP : MP :: QX — ZX : ZX, ou NM : MP :: QZ : ZX.

608. *La surface de l'ellipse est à celle du cercle décrit sur son grand axe, comme le petit axe est au grand axe*; car les ordonnées à l'ellipse étant proportionnelles aux ordonnées au cercle, correspondantes (606), la somme des premieres, ou la surface de l'ellipse est à la somme des secondes, ou à la surface du cercle comme une CD d'entre les premieres est à sa correspondante CA entre les secondes (136) ou comme D*d* est à A*a*.

609. *Les ordonnées au petit axe sont proportionnelles aux ordonnées correspondantes d'un cercle décrit sur ce petit axe, & à leurs excès sur elles : enfin la surface de l'ellipse est à celle de ce cercle comme le grand axe est au petit axe*; outre que ces trois propositions sont une conséquence évidente du n°. 583, il seroit aisé de les démontrer de la même maniere que les trois précédentes.

610. *La surface* x *d'une ellipse est égale à la surface* s *d'un cercle dont le rayon* m *est moyen proportionnel entre le grand demi-axe* a *& le petit demi-axe* b. Soit S la surface du cercle dont le rayon est *a*, on aura (373) S : *s* :: *aa* : *mm* : & puisque par la supposition ÷ *a*.*m*.*b*, on a (147) *a* : *b* :: *aa* : *mm* : donc S : *s* :: *a* : *b*; mais on a S : *x* :: *a* : *b*. (608) : donc S : *s* :: S : *x* : donc *s* = *x*.

611. *Les surfaces de deux ellipses sont entr'elles en raison composée de leurs axes*; car ces surfaces sont entr'elles comme celles de deux cercles dont les diametres seront moyens proportionnels entre leurs axes (610), ou comme les quarrés de ces diametres (373), ou comme les produits des axes dont ces diametres sont moyens proportionnels (127).

Fig. 59. 612. *Un secteur elliptique* C s Z *est au secteur circulaire correspondant* C s Q, *comme le petit axe est au grand axe ;* car la somme des ordonnées à l'ellipse, qui composent l'espace *s* X Z, est à la somme des ordonnées au cercle qui composent l'espace *s* X Q, comme Z X est à Q X ; de même les deux triangles C X Z, C X Q de même base C X, sont entr'eux comme leurs hauteurs Z X, Q X : donc C X Z : C X Q : : *s* X Z : *s* X Q, ou (131) C X Z + *s* X Z : C X Q + *s* X Q : : *s* X Z : *s* X Q, ou enfin C *s* Z : C *s* Q : : *s* X Z : *s* X Q : : X Z : X Q : : C D : C A : : *d* D : *a* A.

613. Et comme le secteur circulaire C *s* Q est égal au demi-produit de l'arc *s* Q par le rayon C A, le secteur elliptique C *s* Z est égal au demi-produit du même arc *s* Q par le petit axe C D ; car $\frac{sQ \times CA}{2} : \frac{sQ \times CD}{2} ::$ C A : C D : : C *s* Q : C *s* Z : donc puisque $\frac{sQ \times CA}{2} =$ C *s* Q, on a aussi $\frac{sQ \times CD}{2} =$ C *s* Z.

DE L'HYPERBOLE.

DEFINITIONS.

Fig. 60. 614. L'*Hyperbole est une courbe* M S R, *telles que la différence* M *f* — M F *des distances de chacun de ses points*, comme M aux deux points déterminés F, *f*, qu'on appelle *foyers*, *est toujours la même.*

615. Il est évident qu'en faisant la distance *f* M la plus courte, on pourra trouver autour de *f* une seconde hyperbole N *s* O entierement égale & semblable à la premiere : ces deux courbes s'appellent *hyperboles opposées.*

616.

616. Si l'on fait passer une droite F*f* par les foyers ; la partie S*s* de cette droite comprise entre les hyperboles opposées, s'appelle le *premier axe* de l'hyperbole. La droite D *d* qui divise perpendiculairement en deux parties égales la distance F*f* des foyers, & telle que des lignes S D, S *d* tirées de S à ses deux bouts, soient égales chacune à C F, est le *second axe*. Le point d'intersection C des deux axes est le *centre*, F*f* l'excentricité. La perpendiculaire M P au premier axe prolongé ; est une *ordonnée* à ce premier axe, P S, *p s* en sont les *abcisses*. La perpendiculaire M G au second axe prolongé ; s'il est nécessaire, est une ordonnée au second axe ; les abcisses sont G D, G *d*.

617. Soit tirée par le point S une perpendiculaire E*e* à C*p*, dont les parties S E, S*e* soient égales à C D ou à C*d*. On appelle *asymptotes des hyperboles opposées* M S R, N*s*O, les droites indéfinies B C *e*, *b* C E, qui passent par le centre C & par les points E *e*, ou, ce qui revient au même, qui passent par le centre C & qui sont paralleles aux droites S D, S *d*; car le triangle C D E étant égal en tout au triangle C *d* S, leurs angles homologues E C D, S *d* C sont égaux, & ces angles étant correspondans par rapport à la sécante D *d*, les lignes E C, S *d* sont paralleles ; il en est de même des droites S D, *e* C.

618. *L'angle* e C E *fait au centre par les asymptotes ; diminue ou augmente selon que le premier axe de l'hyperbole est plus ou moins grand, le second axe demeurant le même ;* car la moitié S C E de cet angle diminue évidemment à mesure que S C s'allonge (277), S E demeurant le même ; & lorsque S C = S E, l'angle S C E est de 45°, l'angle total F C *e* est droit, & D E S C est un quarré : dans ce cas les hyperboles M S R, N *s* O s'appellent *équilateres*.

619. Si l'on prend sur le petit axe prolongé les *Fig. 61.*

O

droites C Y, C *y* égales à C F ou à S D, les points Y, *y* pourront être les foyers de deux nouvelles hyperboles opposées K D, Z *d*, qui à cause de D S = C Y, auront D *d* pour premier axe, S *s* pour second axe : on les appelle *hyperboles conjuguées* aux deux premieres, & réciproquement celles-ci sont conjuguées aux deux autres.

620. Si par les points D, *d* on fait passer deux perpendiculaires à D *d* égales chacune à S *s*, elles aboutiront aux points B, E & *b*, *e*, elles formeront un rectangle B E, *e b*, les droites B D, D E, *b d*, *d e*, C *s*, C S seront égales entr'elles : donc (617) *les asymptotes* B C *c*, *b* C E *des hyperboles opposées* M S, O *s* *sont aussi les asymptotes des hyperboles conjuguées* K D, Z *d*.

621. Il est évident que D E S C est un rectangle, dont les diagonales sont par conséquent égales & se divisent au centre I en parties égales. Le quarré SI^2 de la moitié S I d'une de ces diagonales S D, s'appelle la *puissance* de l'hyperbole M S.

622. Une droite M O, tirée d'un point quelconque d'une hyperbole M S à son opposée O *s*, en passant par le centre, est un *diametre*. Le diametre K Z des hyperboles conjuguées, parallele à la tangente *t* A, qui passe par l'origine M du premier diametre M O, est un *diametre conjugué* au diametre M O. Une droite L V, tirée d'un point quelconque L d'une hyperbole au diametre M O prolongé, si elle est parallele à son diametre conjugué K Z, ou à la tangente *t* A, qui passe par l'origine M du premier diametre, est une *ordonnée* à ce diametre : les droites V M, V O en sont les *abcisses*.

623. Une troisiéme proportionnelle aux deux axes, ou à deux diametres conjugués quelconques, s'appelle le *parametre* du premier terme de la proportion.

624. *Et comme dans l'hyperbole équilatere* les deux

axes sont égaux, *le parametre ne differe pas de l'un des axes.*

Propriétés de l'hyperbole considérée par rapport à ses axes.

THÉORÊMES.

625. *LA distance de chaque foyer au bout le plus proche du premier axe* Ss *est la même*, ou $FS = fs$; car $Sf - SF = sF - sf$ (588), ou bien $Ss + sf - SF = Ss + SF - sf$; ôtant Ss des deux membres, & transposant $-SF$ & $-sf$, on a $2sf = 2SF$, ou $sf = SF$. Fig. 601

626. *Donc le premier axe est divisé en deux également par le second*, ou $CS = Cs$: & pour la même raison $CD = Cd$. Fig. 611

627. Et par conséquent si on mene sur les deux bouts du second axe Dd les perpendiculaires BE, be, on a le rectangle $BEeb$, qui est divisé par les deux axes en quatre rectangles égaux en tout.

628. *La différence des distances des deux foyers à chaque point* M *de l'hyperbole est égale au premier axe* Ss; car la différence des distances des deux foyers au point S, est $Ss + sf - SF$, ou (625) $Ss + sf - sf$, ou Ss; & cette différence est la même pour tous les points de la courbe (614). Fig. 601

629. Je ferai dans la suite, comme pour l'ellipse (570), le demi-premier axe CS, ou $Cs = a$, le demi-second axe CD, ou $Cd = b$, le parametre du premier axe $= p$, la demi-excentricité CF ou $Cf = c$, l'ordonnée $MP = y$, la moitié du premier axe prolongé en P, c'est-à-dire $CP = x$: on aura donc SP

$= x - a$, $sP = x + a$, $FP = x - c$, $fP = x + c$, sf ou $SF = c - a$, sF ou $Sf = c + a$; & puisque $fM - FM = 2a$ (628), si on fait la somme $fM + FM = 2z$, on aura (177) $fM = z + a$, & $FM = z - a$.

REMARQUE.

630. En comparant les expressions algébriques de quelques-unes de ces dernieres lignes avec les expressions de leurs semblables dans l'ellipse (570), on voit qu'elles different par les signes; d'où on peut déja conjecturer que l'équation à l'ellipse & à l'hyperbole, aussi bien que les expressions de la plûpart de leurs dimensions homologues, ne different aussi que par les signes. Nous allons nous en assurer dans les théorêmes suivans.

631. *Le quarré* bb *du demi-second axe est égal au produit* $cc - aa$ *des distances* $c + a$, $c - a$ *d'un des foyers* F *aux deux bouts* s S *du premier axe*; car le triangle rectangle SCD donne $CD^2 = SD^2 - SC^2$, ou (629) $bb = cc - aa$.

632. *L'équation à l'hyperbole est* $aayy = bbxx - aabb$, ou $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$. La démonstration est la même que pour l'équation à l'ellipse (572), excepté qu'au lieu de faire la derniere division par $aa - cc$, il faut la faire par $cc - aa$, à qui il faut ensuite substituer bb, qui lui est égal (631).

633. Gardant les mêmes dénominations qu'on l'a fait pour l'ellipse n°. 573, excepté que $GD = y - b$, on trouve par les mêmes opérations que l'*équation au second axe de l'hyperbole est* $bbxx = aayy + aabb$, ou $xx = \frac{aayy}{bb} + aa$, & en changeant ces dénominations, comme on l'a fait dans le même n°. on trouve

que *la seconde équation au second axe d'une hyperbole est* $yy = \frac{bbxx}{aa} + bb$.

634. *L'équation au parametre du premier axe de l'hyperbole est* $yy = \frac{pxx}{2a} - \frac{ap}{2}$: la démonstration est la même que pour l'ellipse n°. 574.

635. *L'équation au parametre* q *du second axe de l'hyperbole est* $xx = \frac{qyy}{2b} + \frac{bq}{2}$; ou en changeant les dénominations, comme on l'a fait pour l'ellipse (n°. 575), on trouve de la même maniere que *la seconde équation au parametre du second axe d'une hyperbole est* $yy = \frac{pxx}{2a} + \frac{ap}{2}$.

REMARQUE I.

636. En comparant les équations aux axes & aux parametres de l'hyperbole, aux équations trouvées (572. 573. 574. 575.) pour les axes & les parametres de l'ellipse, la conjecture que nous avons faite plus haut (630) se vérifie ; elles ne different que par les signes, & l'on voit bien que cette différence dans les équations de ces courbes doit aussi se trouver dans les expressions de leurs propriétés analogues. On marque ainsi tout à la fois l'équation au premier axe de l'ellipse & de l'hyperbole $yy = \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}$: le signe supérieur est toujours pour l'ellipse, l'inférieur pour l'hyperbole. On marque de même toutes les expressions commune à ces deux courbes, & qui ne different que par les signes.

REMARQUE II.

637. En comparant *les équations au premier & au second axe d'une hyperbole, de même que les équations*

[illegible] on voit qu'elles *dif-* [illegible] *signes du second terme*; [illegible] dans les propriétés [illegible] au second axe.

[illegible] *équilatere est* $yy = xx$ [illegible] hyperbole équilatere $b = a$ [illegible] les équations trouvées [illegible]

[illegible] que, [illegible] *premier axe est* [illegible] *quarré du* [illegible]

[illegible] se démontrent com- [illegible] 581, 582, [illegible] trouvera cet avan- [illegible] l'ellipse, qu'il se [illegible] une comparaison [illegible] & que le peu [illegible] augmentera de beau- [illegible]

[illegible] *différentes ordonnées au pre-* [illegible] *produits de leurs abcisses.* [illegible] *premier axe est* [illegible] *comme le produit* [illegible] *aux extrémités du* [illegible]

[illegible] *premier axe est* [illegible] *du premier* [illegible]

[illegible] MG *au second* [illegible] *des droites* [illegible] *axe est au* [illegible]

644. 6°. *Le quarré d'une ordonnée* MG *au second axe d'une hyperbole, est à la somme des quarrés* $CD^2 + CG^2$, *comme le parametre du second axe est à ce second axe.*

REMARQUE.

645. La différence qui se trouve entre les proportions des deux derniers n°. & celles qu'on a trouvé pour les ordonnées au premier axe dans les n°. 639 & 642, vérifie ce qu'on a prévu plus haut (637), c'est-à-dire que *les ordonnées au premier & au second axe de l'hyperbole n'ont pas les mêmes propriétés respectives.*

646. *L'hyperbole s'éloigne toujours du premier axe prolongé à l'infini*; car aa étant une grandeur constante, $xx - aa$ croît avec x; & $xx - aa$ croissant, yy croît dans la même proportion (640) : donc yy croît avec x, & par conséquent peut croître à l'infini. Donc, &c. (522).

647. *Les ordonnées au premier ou au second axe d'une hyperbole, également éloignées du centre, sont égales, soit qu'elles soient toutes les deux tirées dans la même hyperbole, soit que l'une d'elles soit tirée dans l'hyperbole opposée.* Fig. 60.
Car dans ce cas ses ordonnées au premier axe ont les mêmes abcisses, & les ordonnées au second axe ont la même abcisse GD, & par conséquent la même somme des quarrés $CD^2 + CG^2$; or les premieres sont proportionnelles aux produits de leurs abcisses, & les secondes à la somme des quarrés $CD^2 + CG^2$: donc les premieres, de même que les secondes, sont proportionnelles dans le cas présent à des quantités égales, & par conséquent sont égales entr'elles.

648. *Chaque axe coupe en deux également toute droite qui lui est perpendiculaire, & qui est terminée des deux côtés par la même hyperbole, ou par les hyperboles opposées*; car les deux parties sont des ordonnées également éloignées du centre.

649. *Une perpendiculaire* E e *élevée sur l'extrémité* S *du premier axe d'une hyperbole, est tangente à l'hyperbole*; car l'abcisse S P mesure la distance de la double ordonnée M L à la ligne E *e*, & cependant elle est la plus longue de toutes les lignes qu'on peut élever perpendiculairement sur la ligne M L jusqu'à la courbe M S L, puisque S P a autant de points qu'il y a de doubles ordonnées dans l'espace M S L, ou, ce qui est la même chose, autant de points qu'on peut tirer d'ordonnées de la courbe S L; au lieu qu'une autre ligne, comme *t u*, parallele à S P, n'a qu'autant de points qu'on peut tirer d'ordonnées dans la courbe *t* L: donc tous les points de la courbe M S L, excepté S, sont au dessous de la droite E *e*. Donc, &c.

Fig. 61. Donc les lignes E *e*, B *b*, B E, *b e* sont des tangentes aux quatre hyperboles M S, O *s*, K D, Z *d*. La définition que nous avons donné de l'axe d'une courbe (521) convient donc parfaitement aux droites S *s*, D *d*.

Fig. 62. 650. Pour *mener une tangente* T A à un point M de l'hyperbole, tirez M F, M *f*. De M, comme centre, avec le rayon M F, décrivez l'arc F I E; par le milieu I de cet arc, tirez en M la droite T A; c'est la tangente cherchée. Il est impossible qu'elle entre dans l'hyperbole; car supposons que M X soit une portion d'hyperbole coupée en M par T A, & que la ligne A *f* coupe la courbe en *m*; si de *m*, comme centre, avec le rayon *m* F on décrit un arc F R jusqu'à la ligne A *f*, il passera au dessus de E; car il passeroit en E s'il étoit décrit du point A, puisque T A a tous ses points aussi éloignés de E que de F (209): cela posé, on aura *f* R = *m f* — *m* F, & *f* E = M *f* — M F; or *f* R est plus court que *f* E, puisqu'il est même plus court que *f o* (286): donc on auroit deux points M, *m* dans l'hyperbole, tels que les différences de leurs distances aux deux foyers seroient inégales, ce qui est

contraire à la définition de l'hyperbole (614) : donc T A ne peut entrer dans l'hyperbole : donc elle a tous ses points hors M au dessus de la courbe (520).

651. Donc *les angles* T M f, T M F, *faits avec la tangente* T A *au point de contact par deux droites tirées des foyers, sont égaux.*

652. *L'expression de la sous-normale* B P *est* $\frac{ccx - aax}{aa}$ ou (substituant bb au lieu de $cc - aa$ (631)) $\frac{bbx}{aa}$, ou enfin (substituant $\frac{ap}{2}$ au lieu de bb (642 & 574)) $\frac{px}{2a}$; car on a trouvé dans la démonstration du n°. 632. $cc - 2Cx + xx + yy = FM^2$. On a trouvé aussi dans le cours de la même démonstration yy, ou $PM^2 = \frac{a^4 - aacc - aaxx + ccxx}{aa}$. Substituant cette valeur de yy, ôtant la fraction & réduisant, on trouve $\frac{a^4 - 2aacx + ccxx}{aa} = FM^2$, & $\frac{cx - aa}{a} = FM$: cela posé, à cause des paralleles B M, F E, on a fE : fF : : M E ou M F : B F, ou $2a : 2c$: : $\frac{cx - aa}{a} : \frac{ccx - caa}{aa} = BF$; or $BP = BF - FP$, & $FP = x - c$: donc $BP = \frac{ccx - caa}{aa} - x + c = \frac{ccx - aax}{aa}$.

653. *L'expression du quarré* B M² *de la normale* B M *est* $\frac{b^4x^2 + a^2b^2x^2 - a^4b^2}{a^4}$; car $BM^2 = BP^2 + PM^2 =$ (652 & 632) $\frac{b^4x^2}{a^4} + \frac{bbxx}{aa} - bb = \frac{b^4x^2 + a^2b^2x^2 - a^4bb}{a^4}$.

654. *L'expression de la soutangente* P T *est* $\frac{xx - aa}{x}$;

car le triangle rectangle B M T donne (334) $\div$ B P . P M . P T : donc $PT = \frac{PM^2}{BP}$; or divisant $\frac{bbxx}{aa} - bb$ par $\frac{bbx}{aa}$, & divisant encore les deux termes du quotient $\frac{bbxx - aabb}{bbx}$ par bb, on trouve $PT = \frac{xx - aa}{x}$.

655. *L'expression de* C T *est* $\frac{aa}{x}$; car $CT = CP - PT = x - \frac{xx + aa}{x} = \frac{aa}{x}$.

656. Donc *on a constamment la proportion continue* $\div$ C P . C S . C T, ou $\div$ x . a . C T, *& par conséquent un second moyen de mener une tangente à un point donné de l'hyperbole.*

657. *L'expression de* S T *est* $\frac{ax - aa}{x}$; car $ST = CS - CT = a - \frac{aa}{x} = \frac{ax - aa}{x}$.

Fig. 64. ou 69. 658. *L'expression de* C A *est* $\frac{bb}{y}$; car les triangles semblables B P M, T C A donnent M P : B P :: C T : C A, ou $y : \frac{bbx}{aa} :: \frac{aa}{x} : \frac{bbaax}{yaax} = \frac{bb}{y}$.

659. Donc *on a constamment, comme dans l'ellipse,* (599) *la proportion continue* $\div$ C G . C D . C A; car puisque $CA = \frac{bb}{y}$, donc $\div$ y . b . C A.

Fig. 60. ou 61. 660. *L'expression de la puissance* SI^2 *d'une hyperbole est* $\frac{aa + bb}{4}$; car $SD^2 = CS^2 + CD^2 = aa + bb$: or $SI = \frac{SD}{2}$; donc $SI^2 = \frac{SD}{4} = \frac{aa + bb}{4}$. Il en est de même de DI^2, CI^2, EI^2.



Propriétés de l'hyperbole considérée par rapport à ses asymptotes.

DÉFINITION.

661. UNE droite M G tirée d'un point quelconque M de l'hyperbole à l'asymptote voisine C E parallelement à l'autre asymptote C e, s'appelle une ordonnée à l'asymptote C E, & C G en est l'abcisse. Fig. 61.

THÉOREMES.

662. *Si on prolonge une double ordonnée* M m *jusqu'aux asymptotes, les parties* M N, m n *seront égales*; car le triangle C N n, étant semblable au triangle C E e, est isocele comme lui : donc la perpendiculaire C P à la base N n, fait P N = P n; & d'ailleurs P M = P m (648) : donc M N = mn.

663. *Si on prolonge une ordonnée* P M *au premier axe jusqu'aux asymptotes, on a* M N × M n = C D^2; ou $\div$ M N . C D . M n; car les triangles semblables C P N, C S E donnent C S : S E ou C D :: C P : P N $= \frac{bx}{a}$; donc M N $= \frac{bx}{a} - y$, & M $n = \frac{bx}{a} + y$; donc M N × M $n = \frac{bbxx}{aa} - yy$; or de l'équation à l'hyperbole $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$, on tire bb ou C D^2 $= \frac{bbxx}{aa} - yy$: donc M N × M n = C D^2.

664. Puisque M A × M F = C D^2 (663), & que pour la même raison G I × G Z = C D^2, on a M A × M F = G I × G Z. Fig. 63.

665. *Si de deux points quelconques* M, G *d'une hyperbole on tire deux paralleles* M E, G S & M K, G N *à*

chaque asymptote, on a M E × M K = G S × G N. Par les points M, G, menez les ordonnées à l'axe A F, I Z prolongées jusqu'aux asymptotes, elles formeront les triangles semblables M E A, G S I, & F M K, Z G N : donc M A : M E :: G I : G S, & F M : K M :: Z G : N G ; & par conséquent (132) M A × F M : M E × K M :: G I × Z G : G S × N G ; or M A × F M = G I × G Z (664) : donc M E × K M = G S × N G.

666. On démontrera de la même façon en se servant des triangles semblables M D A, G B I, au lieu de M E A, G S I ; que *si on tire à travers une hyperbole deux droites* D K, B N *paralleles entr'elles, & terminées aux asymptotes, on aura aussi* D M × M K = B G × G N.

667. *Les deux parties* D M, R K *d'une droite, tirée à travers une hyperbole & terminée aux asymptotes, sont égales* ; car à cause des paralleles A F, I Z, les triangles Z K R, F K M sont semblables, de même que les triangles A D M, I D R : donc M K : R K :: M F : R Z, & R D : M D :: R I : M A ; mais d'ailleurs à cause de R I × R Z = M A × M F, on a R I : M A :: M F : R Z : donc M K : R K :: R D : M D, & M K — R K : R K :: R D — M D : M D, ou M R : R K :: M R : M D : donc R K = M D.

668. On peut tirer de là une maniere de *décrire une hyperbole dont les asymptotes sont données*. Il faut pour cela prendre un point M à volonté entre les asymptotes, & tirer par ce point autant de lignes A F, D K, &c. qu'on voudra, terminées aux deux asymptotes, prendre F T = A M, K R = D M, &c. Les points T, R, &c. seront des points de l'hyperbole, qui serviront, comme le point M, à en déterminer d'autres.

669. *Une tangente* V Z, *terminée aux asymptotes, est divisée en deux également au point de contact* T ; car que

DK parallele à VZ s'avance vers VZ parallelement à elle-même ; les parties DM, RK, comprises entre la courbe & les asymptotes, demeureront toujours égales, & se confondront enfin avec les parties TV, TZ.

670. *Si une tangente* VZ, *terminée aux asymptotes, est parallele à une autre droite* BN, *qui traverse l'hyperbole, & qui est aussi terminée aux asymptotes, on a* $BG \times GN = TV \times TZ = TV^2$ (669) ; car que DK parallele à VZ & à BN s'avance vers VZ parallelement à elle-même, MR diminuera toujours, & l'on aura constamment $BG \times GN = DM \times MK$: donc lorsque MR ne sera plus qu'un point en T, on aura $BG \times GN = TV \times TZ = TV^2$, ou TZ^2.

671. L'ordonnée MG à l'asymptote CA d'une hyperbole étant x, son abcisse CG étant y, *l'équation aux asymptotes d'une hyperbole est* $xy = \frac{aa+bb}{4}$, ou $y = \frac{aa+bb}{4x}$. Fig. 61.

Il faut prouver que $\div\, y \,.\, \sqrt{\frac{aa+bb}{4}} \,.\, x$, ou que $\div$ MG . SI . CG. Tirez MQ parallele à CG, vous aurez MQ = CG : cela posé, les triangles semblables nMQ, SEI donnent la proportion suivante, nM : SE :: MQ = CG : EI = SI ; & parce que (663) $NM \times nM = CD^2 = SE^2$, nM : SE :: SE : NM ; donc CG : SI :: SE : NM ; les triangles semblables MNG, SEI donnent SI : MG :: SE : NM : donc CG : SI :: SI : MG.

672. *Si l'on prolonge* MG *jusqu'à l'hyperbole conjuguée en* K, *on aura* MG = KG ; car on aura $\div$ CG . SI . KG pour les mêmes raisons que $\div$ CG . SI . MG (671) : donc MG = KG.

673. *Les asymptotes* CE, Ce *d'une hyperbole s'en approchent toujours sans jamais la rencontrer* ; car à cause

du numérateur constant $aa + bb$, la valeur $\frac{aa+bb}{4x}$ de l'ordonnée M G, diminue à proportion que le dénominateur $4x$ augmente : donc x augmentant à l'infini, M G diminue à l'infini, & par conséquent n'est jamais réduit à zero.

On pourroit prouver la même chose ainsi : en quelque point qu'on prenne M, on a $MN \times Mn = CD^2$ (663), & par conséquent $MN \times Mn$ est un produit constant : donc Mn augmentant à l'infini (646) en s'éloignant du sommet S, M N diminue à l'infini sans être jamais réduit à zero : donc C E s'approche toujours de la courbe, & ne la rencontre jamais : en effet $PN = \frac{bx}{a}$ (663), & $PN^2 = \frac{bbxx}{aa}$; mais $PM^2 = \frac{bbxx}{aa} - bb$ (632) : donc PM^2 est toujours moindre que PN^2, & PM moindre que PN.

Propriétés de l'hyperbole considérée par rapport à ses diametres.

Fig. 61. 674. UN *diametre quelconque* M O *d'une hyperbole est divisé au centre* C *en deux également* : la démonstration est la même que pour l'ellipse (n°. 600).

675. *Si d'un point* M *d'une hyperbole* M S *on tire une droite* M K *à une des hyperboles conjuguées* K D, *parallelement à une asymptote* B e, *le diametre* K Z, *qui passe par le point de rencontre* K *de la droite* M K *& de l'hyperbole conjuguée, est conjugué au diametre* M O, *qui passe par le point* M; car on a 1°. M G = K G (672); 2°. la ligne A C étant divisée en G dans la même raison que A t en M (328), & t M étant égal à A M (669), on a A G = G C : donc les triangles K G C, M G A sont égaux en tout : donc les angles alternes

CKM, KMA sont égaux : donc le diametre KZ est parallele à *t*A ; & par conséquent (622) conjugué à MO.

676. *La tangente* *t*A *terminée aux asymptotes est égale au diametre* KZ *conjugué à celui* MO, *qui a son origine au point de contact* M ; car à cause des triangles CGK, AGM égaux en tout, on a KC = AM ; & par conséquent (674 & 669) KZ = *t*A.

677. *Donc des droites* MK, CT, *qui joignent les extrémités du demi-diametre* KC, *& de la moitié* *t*M *de la tangente qui lui est parallele, ou qui joignent les extrémités de ces lignes entieres, forment un parallelogramme.*

678. *Etant donnés de grandeur & de position les deux diametres* MO, KZ *d'une hyperbole ; pour en trouver les asymptotes*, tirez par M une parallele au diametre KZ, prenez M*t*, MA égales à CK, ou CZ ; les droites qui passeront par les points CA & C*t* seront les asymptotes (676).

Ou bien tirez MK, & par le milieu G la droite CG ; ce sera une asymptote (672). Par C menez à MK une parellele B*e* ; ce sera l'autre asymptote.

679. Réciproquement *étant données les asymptotes & un point* M *de l'hyperbole*, pour *en trouver deux diametres conjugués*, tirez MK parallele à une des asymptotes B*e* ; prenez GK = GM, & par K faites passer le diametre KZ, il sera conjugué à MO (675).

Ou bien par M tirez la tangente *t*A terminée aux asymptotes (650), & menez-lui par C la parallele KZ, telle que CZ = CK = M*t* ; elle sera le diametre conjugué à MO (676).

680. *Le diametre* MO *d'une hyperbole coupe en deux également toute droite* Ll *qui lui est ordonnée & terminée de part & d'autre du diametre par la courbe ;* car à cause des triangles semblables CMA, CVR & CM*t*, CV*r*, on a *c*M : CV :: MA : VR, &

CM : CV :: M t : V r : donc MA : VR :: Mt : Vr ; or MA $=$ Mt (669) : donc VR $=$ Vr ; mais LR $=$ lr (667) : donc LV $=$ lv.

681. Faisant le demi-diametre CM $= a$, le demi-diametre conjugué CZ, ou M$t = b$, l'ordonnée LV $= y$, CV $= x$; on aura MV $= x - a$, $ov = x + a$: cela posé, je dis que

L'équation aux diametres de l'hyperbole est $aayy = bbxx - aabb$, ou $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$.

Car puisque CM : CV :: MA : VR, on a VR, ou V$r = \frac{bx}{a}$; & par conséquent LR $= \frac{bx}{a} - y$; L$r = \frac{bx}{a} + y$, & LR $\times$ L$r = \frac{bbxx}{aa} - yy$; or LR $\times$ Lr $=$ M$t^2 = bb$ (670) : donc $bb = \frac{bbxx}{aa} - yy$, ou $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$.

682. *Le quarré d'une ordonnée* LV *au premier diametre* MO *d'une hyperbole, est au produit* VM $\times$ VO *de ses abcisses, comme le quarré du diametre conjugué est au quarré du premier diametre* ; car puisque $aayy = bbxx - aabb$: donc $yy : xx - aa :: bb : aa$.

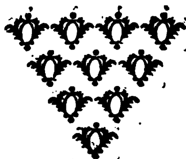
683. *En général les propriétés des ordonnées à un premier diametre d'une hyperbole, sont respectivement les mêmes que celles des ordonnées au premier axe*, puisque l'équation aux axes & aux diametres est respectivement la même ; & par conséquent *toutes les propriétés des axes de l'hyperbole déduites de leur équation, conviennent aussi à deux diametres conjugués.*

684. *Si des extrémités* M, Z *de deux diametres conjugués on mene deux ordonnées* Mp, ZX *au premier axe, le quarré de la droite* CX, *comprise entre le centre & l'ordonnée* ZX, *qui tombe entre le centre & le sommet, est égal au produit* PS $\times$ ps *des abcisses de l'autre ordonnée* MP, *& le quarré de* CP *à la somme* CX^2 + Cs^2 ;

car

car faisant $CX = a$, on aura $Xs = a - u$, & $XS = a + u$; cela posé $Mp^2 : PS \times ps :: bb : aa$ (639) ; de même $ZX^2 : Cs^2 + CX^2 :: bb : aa$ (643) : donc $MP^2 : ZX^2 :: PS \times ps : Cs^2 + CX^2$; & les triangles TPM, CXZ étant semblables, à cause des paralleles tA; ZK, donnent $Mp^2 : ZX^2 :: PT^2 : CX^2$: donc $PS \times ps : Cs^2 + CX^2 :: PT^2 : CX^2$; ou en termes algébriques, $\overline{xx - aa} : \overline{aa + uu} :: \frac{\overline{xx - aa}^2}{xx} : uu$: donc $uu = \frac{\overline{aa + uu} \times \overline{xx - aa}^2}{xx \times \overline{xx - aa}}$ ou $uu = \frac{\overline{aa + uu} \times \overline{xx - aa}}{xx}$: d'où il est aisé de tirer par les régles ordinaires des équations $uu = xx - aa$, ou $CX^2 = PS \times ps$, & $xx = uu + aa$, ou $CP^2 = CX^2 + Cs^2$, ce qu'il falloit démontrer.

685. *La différence des quarrés de deux diametres conjugués quelconques est égale à la différence des quarrés des deux axes, & par conséquent elle est une grandeur constante*; car $ZX^2 : Cs^2 + CX^2 :: bb : aa$ (643); & mettant CP^2 ou xx à la place de $Cs^2 + CX^2$ (684), $ZX^2 : xx :: bb : aa$: donc $ZX^2 = \frac{bbxx}{aa}$; & d'ailleurs $CM^2 = CP^2 + PM^2 = xx + \frac{bbxx}{aa} - bb$, & $CZ^2 = CX^2 + ZX^2 = xx - aa + \frac{bbxx}{aa}$ (684) : donc, réduction faite, $CM^2 - CZ^2 = aa - bb$.



P

Comparaison & propriétés générales des sections coniques.

THÉOREMES.

Fig. 57, 58 & 60. 686. DANS *toute section conique, l'ordonnée à l'axe qui passe par le foyer est la moitié du parametre, & par conséquent la double ordonnée passant par le foyer est le parametre entier.*

Dans la parabole on a dans ce cas $x = \frac{p}{4}$; & substituant $\frac{p}{4}$ à x dans l'équation à la parabole $yy = px$, on a $yy = \frac{pp}{4}$; & par conséquent $y = \frac{p}{2}$.

Dans l'ellipse on aura dans ce cas $x = c$, & $aa - xx = aa - cc = bb$ (571) : donc au lieu de l'équation à l'ellipse $aayy = aabb - bbxx$, ou $\frac{aayy}{bb} = aa - xx$, on aura $\frac{aayy}{bb} = bb$, ou $aayy = b^4$, ou $ay = bb$, ou $ay = \frac{ap}{2}$ (574), ou enfin $y = \frac{p}{2}$.

Dans l'hyperbole, on a aussi dans ce cas $x = c$, & $xx - aa = cc - aa = bb$ (631) : donc au lieu de l'équation à l'hyperbole $aayy = bbxx - aabb$, ou $\frac{aayy}{bb} = xx - aa$, on aura $\frac{aayy}{bb} = bb$, ou $aayy = b^4$, ou $ay = bb$, ou $ay = \frac{ap}{2}$ (634), ou enfin $y = \frac{p}{2}$.

687. *La distance d'un foyer au sommet le plus proche d'une section conique est, par rapport au quart du parametre de l'axe, égale dans la parabole, plus grande dans l'ellipse, & moindre dans l'hyperbole.*

Pour la parabole, voyez la définition du parametre (526).

Dans l'ellipse $a - c$ est plus grand que $\frac{p}{4}$; car $aa - cc = bb = \frac{ap}{2}$ (571 & 574) : donc $a + c : a :: \frac{p}{2}$:

$a - c$; mais a étant plus grand que c, eſt plus que la moitié de $a + c$: donc $a - c$ eſt plus que la moitié de $\frac{p}{2}$, c'eſt-à-dire plus que $\frac{p}{4}$.

Dans l'hyperbole $c - a$ eſt moindre que $\frac{p}{4}$; car $cc - aa = bb = \frac{ap}{2}$ (631 & 634) : donc $c + a : a :: \frac{p}{2} : c - a$; or a étant moindre que c, eſt moindre que la moitié de $c + a$: donc $c - a$ eſt moindre que la moitié de $\frac{p}{2}$, c'eſt-à-dire moindre que $\frac{p}{4}$.

688. *La ſous-normale* B P *eſt, par rapport à la moitié du parametre, égale dans la parabole, moindre dans l'ellipſe, plus grande dans l'hyperbole.* Fig. 57, 58 & 64.

Pour la parabole, voyez le n°. 543.

Dans l'ellipſe & dans l'hyperbole $BP = \frac{px}{2a}$ (591 & 652) : donc $BP : \frac{p}{2} :: x : a$; mais x étant moindre que a dans l'ellipſe, & plus grand dans l'hyperbole, B P eſt moindre dans l'ellipſe, & plus grand dans l'hyperbole que $\frac{p}{2}$.

689. *La ſous-tangente* P T *eſt, par rapport à l'abciſſe* S P, *double dans la parabole, plus que double dans l'ellipſe, moins que double dans l'hyperbole.*

Pour la parabole, cela a été démontré (542).

Dans l'ellipſe, $PT = \frac{aa - xx}{x}$ (593) : donc $PT : a - x :: a + x : x$; mais x étant plus petit que a, $a + x$ eſt plus que double de x : donc P T eſt plus que double de $a - x$, ou de S P.

Dans l'hyperbole, $PT = \frac{xx aa}{x}$ (654) : donc $PT : x - a :: x + a : x$; mais x étant plus grand que a dans l'hyperbole, $x + a$ eſt moins que double de x : donc P T eſt moins que double de $x - a$, ou de S P.

690. Donc *la partie extérieure* S T *de la ſous-tangente eſt, par rapport à l'abciſſe* S P, *égale dans la para-*

bole, plus grande dans l'ellipse, & moindre dans l'hyperbole.

691. Il est clair que plus les foyers d'une ellipse sont près l'un de l'autre, le fil qui la décrit demeurant le même, plus le grand axe diminue & le petit augmente ; & qu'enfin si les foyers se confondent au centre, les deux axes seront égaux & la courbe sera un cercle ; d'où il suit qu'*on peut regarder le cercle comme une ellipse dont les deux foyers sont au centre.* Le parametre du cercle est donc égal au diametre, c'est-à-dire (comme on l'a aussi démontré, pour les autres sections coniques (686)) à la double ordonnée qui passe par le foyer ; & par conséquent *les équations à l'ellipse & les expressions de ses différentes dimensions conviennent au cercle, en faisant dans ces expressions* $a = b$, $p = 2a$ & $c = 0$.

692. Comme dans l'*hyperbole équilatere* le parametre est égal aux deux axes (624), cette courbe *a nécessairement bien des propriétés analogues à celles du cercle ;* mais l'équation au cercle étant (524) $yy = aa - xx$, & l'équation à l'hyperbole équilatere étant $yy = xx - aa$ (638), qui ne differe de l'équation au cercle que par les signes, il suit que *le cercle est à l'hyperbole équilatere ce qu'est l'ellipse (636) à l'hyperbole ordinaire.*

693. Plus le centre d'une ellipse ou d'une hyperbole s'éloigne du sommet, plus les diametres (qui dans l'ellipse & dans l'hyperbole passent par le centre) sont inclinés à l'axe ; enfin si le centre est à une distance infinie du sommet, les diametres ne concourant qu'à une distance infinie, peuvent être regardés comme paralleles à l'axe, ainsi qu'ils le sont dans la parabole : donc plus une ellipse ou une hyperbole est excentrique, plus elle approche de la nature

de la parabole ; ensorte qu'*on peut regarder comme une parabole, l'ellipse ou l'hyperbole dont l'excentricité est infinie ; & réciproquement la parabole peut être regardée comme une ellipse, ou une hyperbole infiniment excentrique.*

694. *Pour déterminer l'espece & la position des axes d'une section conique dont une portion est donnée*, menez au dedans de la section deux droites paralleles & terminées de part & d'autre à la courbe, faites passer par le milieu de ces lignes une droite, ce sera un diametre (680). Cherchez-en de la même maniere un second ; s'il est parallele au premier, la section est une parabole (527) ; s'il le coupe au-dedans de la section, c'est une ellipse ; s'il le coupe en dehors, c'est une hyperbole, & le point d'intersection est le centre.

Si la section est une parabole, faites passer par le sommet une parallele aux deux diametres trouvés, ce sera l'axe (527). Si la section est une ellipse ou une hyperbole, décrivez un arc de cercle qui coupe la courbe en deux points, & dont le centre soit celui de la section ; joignez par une droite ces deux points d'intersection, & du centre menez-lui une perpendiculaire, ce sera le grand ou le petit axe (521) : une perpendiculaire à l'axe trouvé, tirée par le centre de la section, sera l'autre axe.

695. *Le quarré du second demi-axe* CD *d'une ellipse ou d'une hyperbole est égal*, 1°. *au produit de deux perpendiculaires* CE, MB *à la tangente, dont l'une* CE *est tirée du centre, & l'autre* MB *élevée sur le point de contact.* Prolongez s'il le faut le demi-petit axe CD jusqu'à la tangente en A, & soient tirées les ordonnées MP, MG au grand & au petit axe ; les triangles CEA, CET, MPT, MPB sont semblables, le premier & le dernier comparés ensemble donnent PM Fig. 64 & 65.

ou $CG : BM :: CE : CA$: donc $BM \times CE = CG \times CA = CD^2$, à cause de $\div CG . CD . CA$ (596 & 659).

696. 2°. *Au produit de deux perpendiculaires* $SI \times XN$ *élevées sur les extrémités de l'axe jusqu'à la tangente* TM; car (595 & 656) $CP : CS :: CS : CT$: donc pour l'ellipse $CS - CP : CS :: CT - CS : CT$, & pour l'hyperbole $CP - CS : CS :: CS - CT : CT$; c'est-à-dire dans l'ellipse comme dans l'hyperbole, $PS : CS :: ST : CT$, ou $PS + ST : ST :: CS + CT : CT$, ou $PT : ST :: XT : CT$; mais les triangles semblables TSI, TPM donnent $PT : ST :: PM : SI$, & les triangles semblables TXN, TCA donnent $XT : CT :: XN : CA$: donc $PM : SI :: XN : CA$: donc $SI \times XN = PM \times CA = CG \times CA = CD^2$ (599 & 659).

Fig. 66 & 67 697. 3°. *Au produit de deux perpendiculaires* FB, OE *à la tangente, menées des deux foyers* F, O; car les deux triangles OIS, FBN sont semblables, de même que les triangles FNX, OIE, comme nous le démontrerons bientôt : donc $SI : FB :: OE : FN$, & $OI : FN :: OE : NX$: donc $SI : FB :: OE : NX$, & $FB \times OE = SI \times NX = CD^2$ (696).

Il reste à démontrer que les triangles OIS, FBN, & FNX, OIE sont semblables.

1°. Les deux premiers le sont, car puisque $SI \times XN = CD^2 = OS \times OX$ (571 & 631), on a $SI : OS :: OX : XN$: donc les triangles OIS, OXN ayant deux côtés homologues proportionnels autour des angles droits S, X, sont semblables (331), (pour la même raison les triangles FNX, FIS sont aussi semblables), & l'angle $OIS = NOX$; or les angles OIS, IOS valent un angle droit : donc IOS & NOX valent aussi un angle droit : donc l'angle ION est droit, & le triangle OIE est semblable (334)

au triangle I O N, & pour les mêmes raisons le triangle F B N est semblable au triangle N F I. Maintenant à cause des triangles semblables F N X, F I S, F N : F I :: N X : F S ou X O : donc le triangle N F I est semblable au triangle N O X (334), ou F B N à O I S.

2°. Les triangles F N X, O I E sont semblables; car O I S est semblable à O X N : donc O I : O N :: I S : O X ou S F : donc (334) le triangle I F S est semblable à I O N, ou F N X à O I E.

698. *Dans la parabole, la perpendiculaire menée du foyer sur la tangente*, qu'on suppose passer successivement par différens points de la courbe, *croît dans la raison des racines quarrées des rayons recteurs : elle croît plus dans l'ellipse & moins dans l'hyperbole.*

Pour la parabole, voyez le n°. 547.

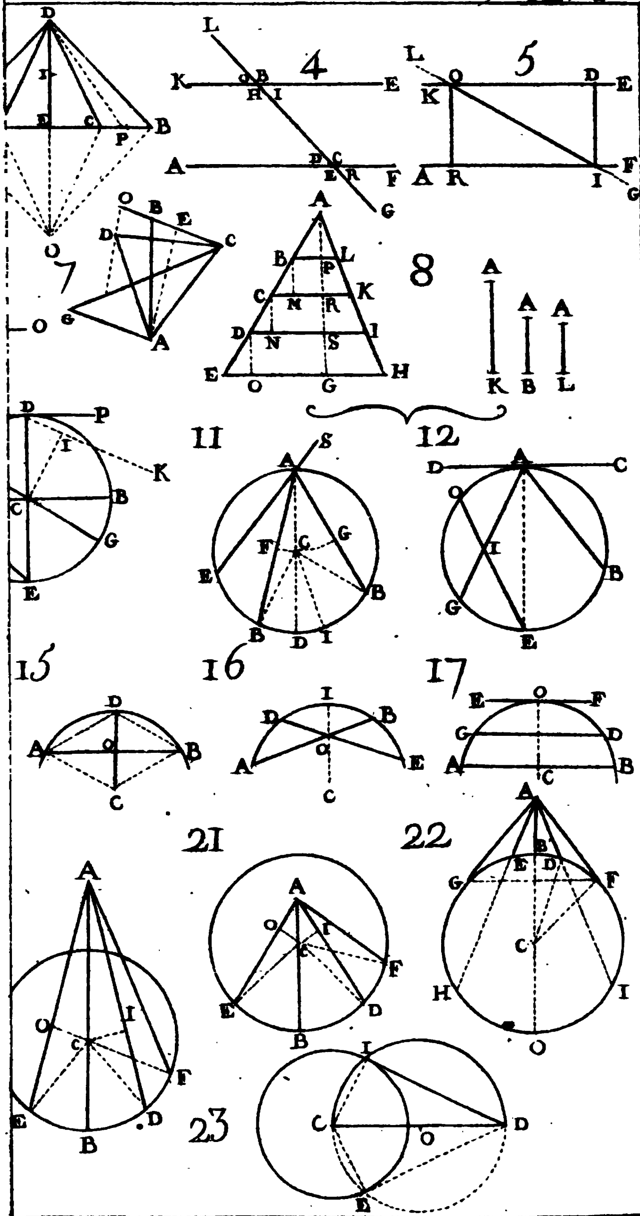
Pour l'ellipse, que du foyer F on mene à la tangente la perpendiculaire F B, & du foyer O la perpendiculaire O E; les triangles rectangles O E M, F B M sont semblables à cause des angles égaux (590) OME, F M B : donc F M : O M :: F B : O E : donc $OE = \frac{FB \times OM}{FM}$: donc $OE \times FB$, ou (697) $CD^2 = \frac{FB^2 \times OM}{FM}$: donc $FB^2 = \frac{CD^2 \times FM}{OM}$, & CD^2 étant une grandeur constante, FB^2 suit la raison de $\frac{FM}{OM}$; il suivroit la raison de F M, si O M étoit constant; mais O M diminuant quand F M augmente, $\frac{FM}{OM}$ ou FB^2 croît en plus grande raison que F M, & F B en plus grande raison que $\sqrt{FM}$.

Pour l'hyperbole, FB^2 croît aussi pour la même raison, comme $\frac{FM}{OM}$, & croîtroit comme F M si O M étoit constant; mais O M croissant avec F M,

$\frac{FM}{\rho M}$ ou FB^2 croît en moindre raison que FM, & FB en moindre raison que $\sqrt{FM}$.

Fig. 68 & 69. 699. *Si de l'extrémité* M *du demi-diametre* C M *d'une ellipse ou d'une hyperbole, on abaisse sur son demi-diametre conjugué* C K *une perpendiculaire* M I, *on a cette proportion* : $MI : CD :: CS : CK$; & par conséquent $CK \times MI = CD \times CS$. Soit tirée de C la perpendiculaire C E à la tangente T A, & soit continué C D jusqu'à cette tangente, les triangles semblables A C E, M P B donnent C E ou $MI : CA ::$ P M ou $CG : MB$; donc $MI = MB = CG \times CA = CD^2$: donc $MI^2 \times MB^2 = CD^4$, ou $MB^2 : CD^2 :: CD^2 : MI^2$, ou en termes algébriques (592 & 653) $\frac{b^4xx \pm a^4bb \mp aabbxx}{a^4} : bb :: bb : \frac{a^4bb}{bbxx \pm a^4 \mp aaxx} = MI^2$. Cela posé, à cause que $CM^2 \pm CK^2 = aa \pm bb$ (605 & 685), ou $CK^2 = \pm aa + bb \mp CM^2$, & que $CM^2 = CP^2 + PM^2 = xx \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}$, ou $\frac{a^2x^2 \pm a^2b^2 \mp b^2x^2}{aa}$, on a, réduction faite, $CK^2 = \frac{\pm a^4 \mp 2aaxx + bbxx}{aa}$: donc, reduction faite, $CK^2 \times MI^2 = aabb$, ou $CK \times MI = ab = CS \times CD$.

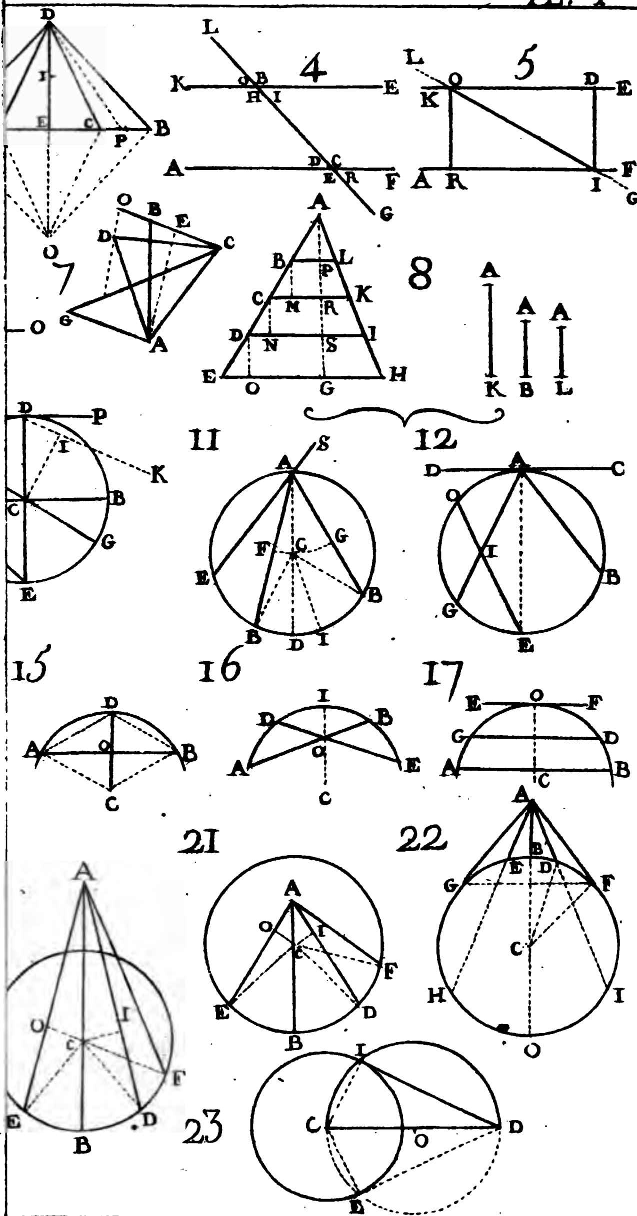
700. *Le parallelogramme fait sous deux diametres conjugués quelconques de l'ellipse ou de l'hyperbole est égal au rectangle fait sous les axes ; & par conséquent tous les parallelogrammes faits sous différens diametres conjugués, sont égaux entr'eux* ; car le parallogramme fait sous les demi diametres conjugués C M, C K, c'est-à-dire dont ces demi-diametres seroient les côtés contigus, en demeurant dans la même situation respective, a pour base C K, pour hauteur M I, & par conséquent


4
5
7
8
11
12
15
16
17
21
22
23

$\frac{FM}{QM}$ ou FB^2 croît en moindre raison que FM, & FB en moindre raison que $\sqrt{FM}$.

Fig. 68 & 69. 699. *Si de l'extrémité* M *du demi-diametre* CM *d'une ellipse ou d'une hyperbole, on abaisse sur son demi-diametre conjugué* CK *une perpendiculaire* MI, *on a cette proportion* : MI : CD :: CS : CK; & par conséquent CK × MI = CD × CS. Soit tirée de C la perpendiculaire CE à la tangente TA, & soit continué CD jusqu'à cette tangente, les triangles semblables ACE, MPB donnent CE ou MI : CA :: PM ou CG : MB : donc $MI = MB = CG \times CA = CD^2$: donc $MI^2 \times MB^2 = CD^4$, ou $MB^2 : CD^2 :: CD^2 : MI^2$, ou en termes algébriques (592 & 653) $\frac{b^4xx \pm a^4bb \mp aabbxx}{a^4} : bb :: bb : \frac{a^4bb}{bbxx \pm a^4 \mp aaxx} = MI^2$. Cela posé, à cause que $CM^2 \pm CK^2 = aa \pm bb$ (605 & 685), ou $CK^2 = \pm aa + bb \mp CM^2$, & que $CM^2 = CP^2 + PM^2 = xx \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}$, ou $\frac{a^2x^2 \pm a^2b^2 \mp b^2x^2}{aa}$, on a, réduction faite, $CK^2 = \pm \frac{a^4 \mp 2axx + bbxx}{aa}$: donc, reduction faite, $CK^2 \times MI^2 = 2abb$, ou $CK \times MI = ab = CS \times CD$.

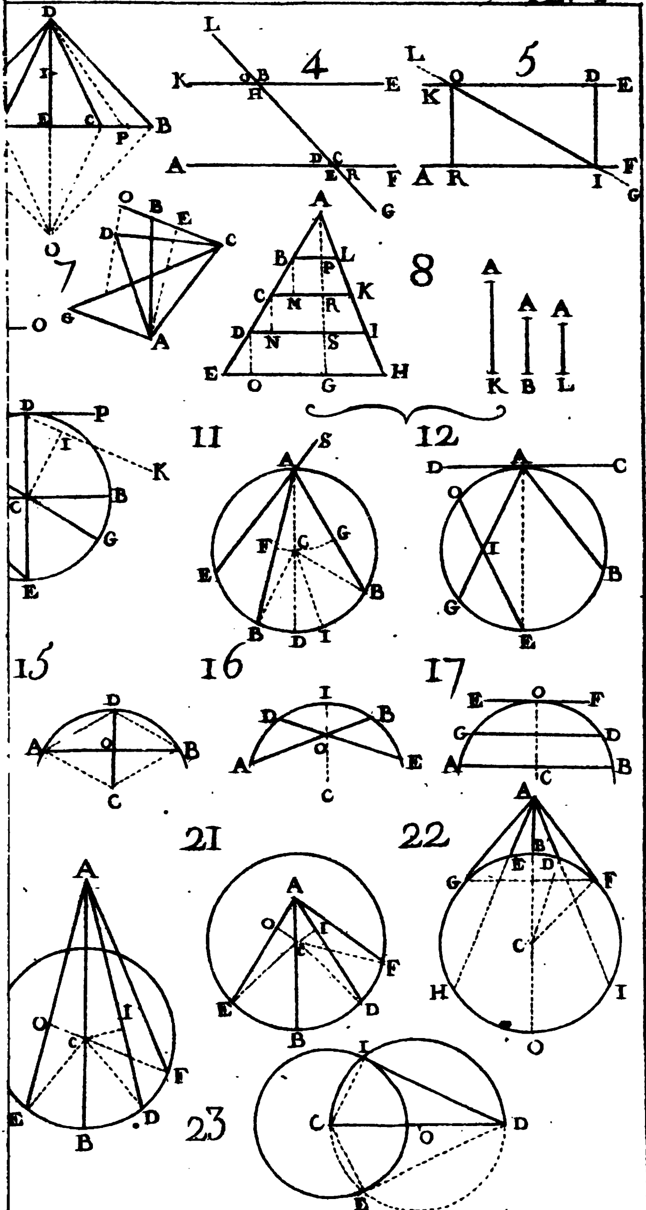
700. *Le parallelogramme fait sous deux diametres conjugués quelconques de l'ellipse ou de l'hyperbole est égal au rectangle fait sous les axes ; & par conséquent tous les parallelogrammes faits sous différens diametres conjugués, sont égaux entr'eux* ; car le parallogramme fait sous les demi diametres conjugués CM, CK, c'est-à-dire dont ces demi-diametres seroient les côtés contigus, en demeurant dans la même situation respective, a pour base CK, pour hauteur MI, & par conséquent

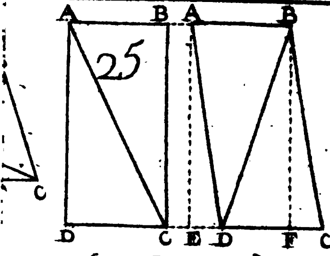

4
L K O B H I E A D C E R F G
5
L O K D E A R I F G
7
O B E D C O G A
8
A B L P C K M R D I N S E O G H
A K A B A L
11
S A E F C G B B D I
12
D A C O I B G E
15
D A O B C
16
I D B A O E C
17
E O F G D A C B
21
A O I C E F D B
22
A B E D G F C H I O
23
I C O D E

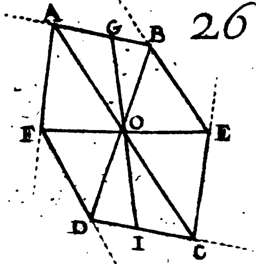
$\frac{FM}{QM}$ ou FB^2 croît en moindre raiſon que FM, & FB en moindre raiſon que $\sqrt{FM}$.

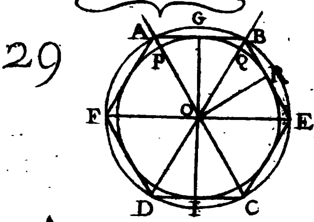
Fig. 68 & 69. 699. *Si de l'extrémité M du demi-diametre CM d'une ellipſe ou d'une hyperbole, on abaiſſe ſur ſon demi-diametre conjugué CK une perpendiculaire MI, on a cette proportion* : MI : CD :: CS : CK ; & par conſéquent $CK \times MI = CD \times CS$. Soit tirée de C la perpendiculaire CE à la tangente TA, & ſoit continué CD juſqu'à cette tangente, les triangles ſemblables ACE, MPB donnent CE ou MI : CA :: PM ou CG : MB : donc $MI = MB = CG \times CA = CD^2$: donc $MI^2 \times MB^2 = CD^4$, ou $MB^2 : CD^2 :: CD^2 : MI^2$, ou en termes algébriques (592 & 653) $\frac{b^4xx \pm a^4bb \mp aabbxx}{a^4} : bb :: bb : \frac{a^4bb}{bbxx \pm a^4 \mp aaxx} = MI^2$. Cela poſé, à cauſe que $CM^2 \pm CK^2 = aa \pm bb$ (605 & 685), ou $CK^2 = \pm aa + bb \mp CM^2$, & que $CM^2 = CP^2 + PM^2 = xx \pm bb \mp \frac{bbxx}{aa}$, ou $\frac{a^2x^2 \pm a^2b^2 \mp b^2x^2}{aa}$, on a, réduction faite, $CK^2 = \pm \frac{a^4 \mp aaxx + bbxx}{aa}$: donc, reduction faite, $CK^2 \times MI^2 = aabb$, ou $CK \times MI = ab = CS \times CD$.

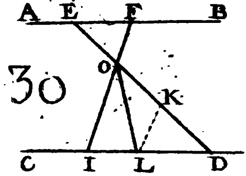
700. *Le parallelogramme fait ſous deux diametres conjugués quelconques de l'ellipſe ou de l'hyperbole eſt égal au rectangle fait ſous les axes ; & par conſequent tous les parallelogrammes faits ſous différens diametres conjugués, ſont égaux entr'eux* ; car le parallogramme fait ſous les demi diametres conjugués CM, CK, c'eſt-à-dire dont ces demi-diametres ſeroient les côtés contigus, en demeurant dans la même ſituation reſpective, a pour baſe CK, pour hauteur MI, & par conſéquent

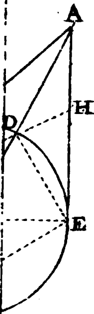

4
5
7
8
11
12
15
16
17
21
22
23

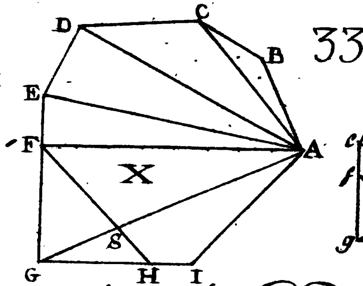

A
B
A
B
25
D
C
E
D
F
C

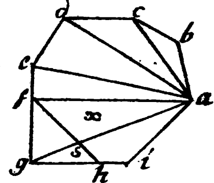

A
G
B
26
F
O
E
D
I
C

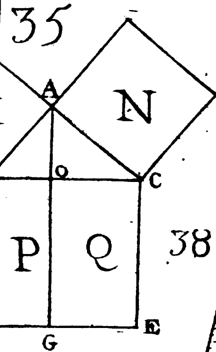

29
G
A
B
P
Q
R
F
O
E
D
I
C

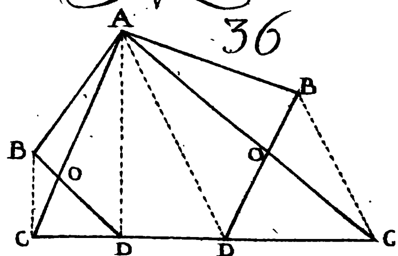

A
E
F
B
O
30
K
C
I
L
D

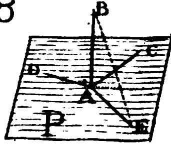

A
H
D
E

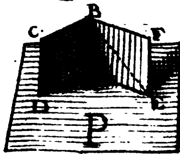

D
C
B
E
F
A
X
S
G
H
I

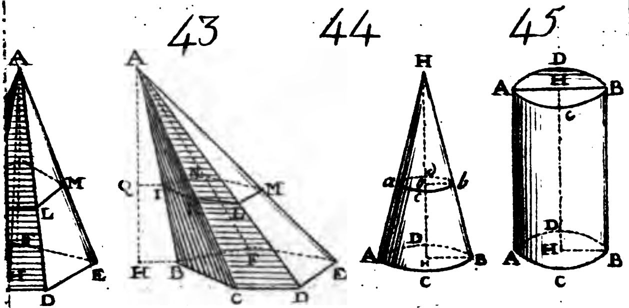

33
d
c
b
e
f
a
x
s
g
h
i

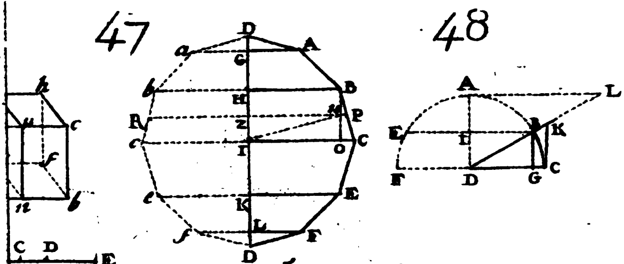

35
A
N
O
C
P
Q
G
E

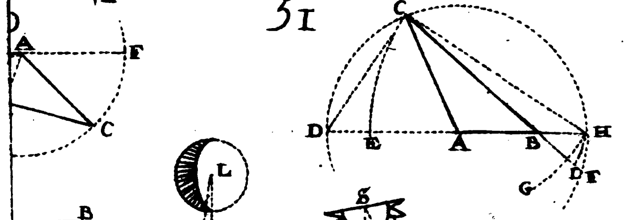

A
36
B
B
O
O
C
D
D
C

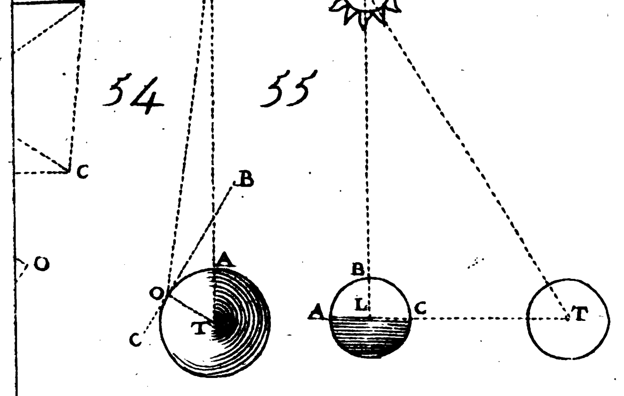

38
B
C
D
A
E
P


39
B
C
F
D
E
P

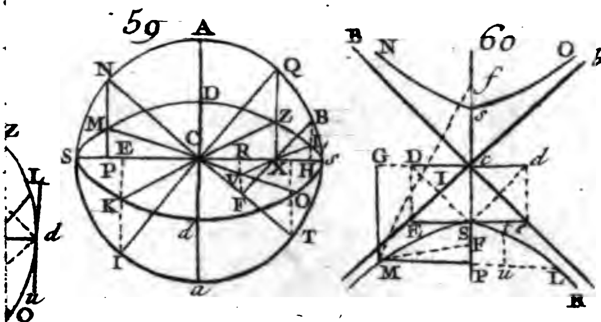

43
44
45

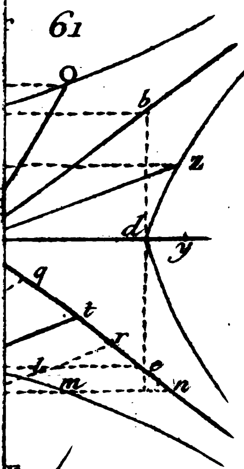

47
48

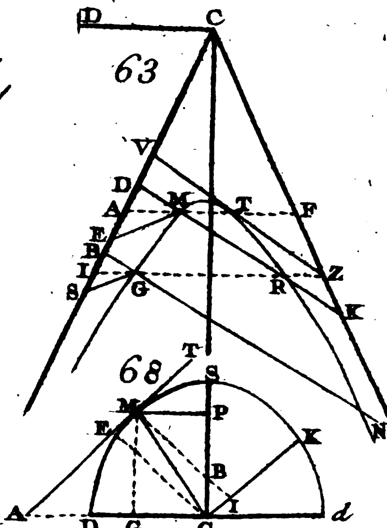

51

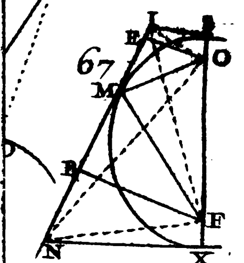

54
55

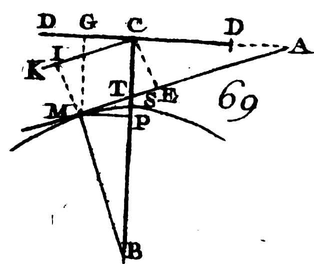
Pl. IV.


59
A
N
Q
D
Z
B
M
C
S
E
R
X
H
s
P
V
K
F
O
d
T
I
a
60
B
N
O
b
f
s
G
D
c
d
I
E
S
F
M
P
u
L
B


61
O
b
Z
d
y
q
t
r
l
e
m
n


D
C
63
V
D
A
M
T
F
E
B
I
S
G
R
Z
K
T
S
68
M
P
E
K
B
A
D
G
C
I
d
N


F
N
X
B
L
E
67
O
M
B
F
N
X


D
G
C
D
A
I
K
T
S
E
69
M
P
B

pour mesure C K × M I = C S × C D (599), qui est le rectangle des demi-axes C S, C D; or le parallelogramme de deux demi-diametres conjugués étant égal au rectangle des demi-axes, il est évident que le parallelogramme des diametres conjugués entiers est égal au rectangle des axes entiers : donc, &c.

FIN.



TABLE

DES SOMMAIRES.

PREMIERE PARTIE.

LEÇON PREMIERE.

De l'Arithmétique.

LEÇON SECONDE.

De l'Algébre.

LEÇON TROISIÉME.

De la formation des puissances & de l'extraction des racines.

LEÇON QUATRIÉME.

Des fractions.

LEÇON CINQUIÉME.

Des raisons & des proportions.

LEÇON SIXIÉME.

Des Equations.



SECONDE PARTIE.

LEÇON SEPTIÉME.

Des Solides.

LEÇON HUITIÉME.

De la Trigonométrie rectiligne.

LEÇON NEUVIÉME.

Des Sections coniques.

FIN DE LA TABLE DES SOMMAIRES.

APPROBATIONS.

J'AI lû, par ordre de Monſeigneur le Chancelier, un manuſcrit qui a pour titre, *Leçons élémentaires de Calcul & de Geométrie*, *&c.* par le P. Torné, Prêtre de la Doctrine Chrétienne, & il m'a paru que l'impreſſion en pouvoit être utile. Fait à Paris le 27 Mars 1754.

BOUGUER.

NOUS Antoine Suret, Prêtre, Supérieur général de la Congrégation de la Doctrine Chrétienne; vû par nous le Privilege du Roi, permettons au Pere Torné, Prêtre de notre Province de Toulouſe, de faire imprimer un Livre de ſa compoſition, intitulé, *Leçons élémentaires de Calcul & de Geométrie pour ſervir d'introduction à un cours de phyſique.*

Donné à Paris dans notre maiſon de S. Charles, le 14 Mai 1754.

SURET, *Supérieur général de la Congrégation de la Doctrine Chrétienne.*

Par mandement de notre R. P. Général.

DUPLAN, *Sécrétaire général.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre, à nos amés & féaux Conseillers, les Gens tenant nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT. Notre amé *le* P. TORNE' *de la Doctrine Chrétienne*, nous a fait exposer qu'il desireroit faire imprimer & donner au public un Ouvrage de sa composition, qui a pour titre, *Leçons élémentaires de Calcul & de Géométrie pour servir d'introduction à un cours de physique*, s'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de privilége pour ce nécessaires : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter ledit Exposant, nous lui avons permis & permettons par ces présentes, de faire imprimer sondit Ouvrage autant de fois que bon lui semblera, & de le faire vendre & débiter par tout notre Royaume pendant le tems de *neuf années* consécutives, à compter du jour de la date desdites présentes ; faisons défenses à toutes sortes de personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance ; comme aussi à tous Libraires, Imprimeurs & autres d'imprimer, faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire ledit Ouvrage, ni d'en faire aucun extrait, sous quelque prétexte que ce soit, d'augmentation, correction, changemens ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit exposant ou de ceux qui auront droit de lui ; à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, l'autre tiers audit exposant, & de tous dépens, dommages & intérêts : à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Imprimeurs & Libraires de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impression dudit Ouvrage sera faite dans notre Royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, suivant la feuille imprimée & attachée pour modéle sous le contrescel des présentes ; que l'impétrant se conformera en tout aux réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; & qu'avant de les exposer en vente le manuscrit ou imprimé qui aura

servi de copie à l'impression dudit Ouvrage, sera remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée, ès mains de notre très-cher & féal Chevalier Chancelier de France, le Sieur de Lamoignon, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliothéque publique ; un dans celle de notre Château du Louvre, & un dans celle de notredit très-cher & féal Chevalier Chancelier de France le Sieur de Lamoignon, & un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur de Machault, Commandeur de nos Ordres ; le tout à peine de nullité des présentes : du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit exposant ou ses ayans cause, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites présentes qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin dudit Ouvrage, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés & féaux Conseillers-Secrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de haro, Charte Normande & Lettres à ce contraires ; car tel est notre plaisir. Donné à Paris, le vingt-deuxiéme jour du mois d'Avril, l'an de grace mil sept cent cinquante-quatre, & de notre regne le trente-neuviéme. Par le Roi en son Conseil.

PERRIN.

J'ai cedé pour toujours au Sieur Charles-Antoine Jombert, Imprimeur-Libraire du Roi à Paris, le privilege ci-dessus, que j'ai obtenu du Roi le 22 Avril dernier, pour en jouir par ledit Sieur Jombert, en mon lieu & place, comme de chose à lui appartenante, suivant nos conventions. A Paris le 25 May 1754.

Registré, ensemble la cession ci-dessus, sur le Registre XIII. de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris, n°. 383, fol. 301, conformément aux anciens réglemens, confirmés par l'Edit du 28 Février 1723. A Paris, le 9 Juillet 1754.

DIDOT, Syndic.